Carmen Angelescu, Nicolae Baciu, Ovidiu Bădescu,
Nicolai Bunduga, Constantin Chiriță,
Marineia-Cristina Cîmpoeșu, Daniela Chiteș,
Gabriela Constantinescu, Dorel Coșic, Mihai Ionescu,
Viorel Lupșor, Laura Marin, Ioan Marinescu,
Sever Moldoveanu, Daniel Năstruț, Ismet Omer, Ana Poștaru,
Nicolae Stănică, Gheorghe Stoianovici, Nicolae Suciu,
Dorina Trifon, George Vlad, Cătălin Zimă

BACALAUREAT 2009

GHID DE PREGĂTIRE

MATEMATICĂ - M1

Profil: real, militar
Specializare: matematică-informatică

Lucrarea conține calendarul, programa și

modele de rezolvare pentru enunțurile

publicate de M.E.C.I. la data de 27. 02. 2009

SIGMA

Carmen Angelescu, Nicolae Baciu, Ovidiu Bădescu,
Nicolai Buzduga, Constantin Chirilă,
Marinela-Cristina Cimpoeşu, Daniela Chiteş,
Gabriela Constantinescu, Dorel Cosic, Mihai Ionescu,
Viorel Lupşor, Laura Marin, Ioan Marinescu,
Sever Moldoveanu, Daniel Năstruț, Ismet Omer, Ana Poştaru,
Nicolae Stănică, Gheorghe Stoianovici, Nicolae Suciu,
Dorina Trifon, George Vlad, Cătălin Zîrnă

GHID DE PREGĂTIRE

BACALAUREAT

MATEMATICĂ - M1

➢ Profil: real, militar
Specializare : matematică-informatică

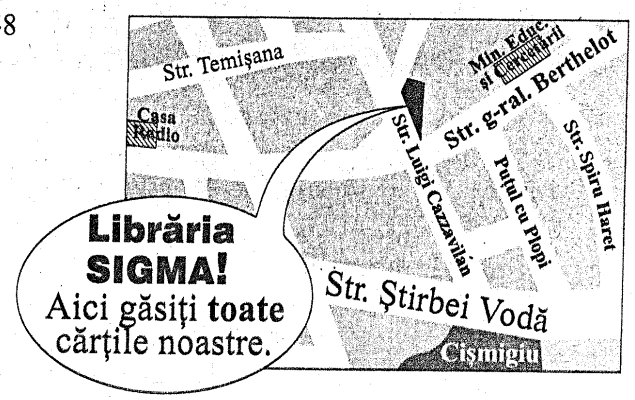
SIGMA

Colaboratori: prof. Tămâian Traian, prof. Pop Ioan, prof. Piciu Daniela, prof. Stanciu Elisabeta, prof. Cârcu Anca, prof. Stanciu Daniel, prof. Popa Mihai, prof. Tebieș Ioan, prof. Culic Camelia

Redactare: Dana Florina Năstase, Marius Ciocîrlan
Tehnoredactare: Camelia Cristea

Enunțurile au fost publicate de M.E.C.I. pe site-ul ministerului la data de 27.02.2009.
Toate drepturile asupra rezolvărilor din prezenta ediție aparțin Editurii SIGMA.

ISBN: 978-973-649-532-8



Editura SIGMA

Sediul central:
Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169
Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70
e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

Distribuție:
Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35
e-mail: comenzi@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

Anticariat:
e-mail: cultural@anticar.ro; office@anticar.ro; web: www.anticar.ro

CALENDARUL
examenului de bacalaureat – 2009

Sesiunea iunie - iulie 2009

1-8 mai 2009	Înscrierea candidaților
12 iunie 2009	Încheierea cursurilor pentru clasa a XII-a
22-23 iunie 2009	Limba și literatura română – proba A – proba orală
23-24 iunie 2009	Limba și literatura maternă – proba C – proba orală
24-25 iunie 2009	Limba și literatura modernă – proba B – proba orală
26 iunie 2009	Limba și literatura română – proba A – proba scrisă
29 iunie 2009	Limba și literatura maternă – proba C – proba scrisă
30 iunie 2009	Proba obligatorie a profilului – proba D – proba scrisă
1 iulie 2009	O probă la alegere din aria curriculară corespunzătoare specializării – proba E – probă scrisă sau practică
2 iulie 2009	O probă la alegere dintre disciplinele din celelalte arii curriculare corespunzătoare specializării – proba F – probă scrisă sau practică
5 iulie 2009	Afișarea rezultatelor (până la 16:00) și depunerea contestațiilor (orele 16:00 – 20:00)
7-8 iulie 2009	Rezolvarea contestațiilor
9 iulie 2009	Afișarea rezultatelor finale

Sesiunea august - septembrie 2009

13-17 iulie 2009	Înscrierea candidaților
17 august 2009	Limba și literatura română – proba A – proba orală
18 august 2009	Limba și literatura maternă – proba C – proba orală
19 august 2009	Limba și literatura modernă – proba B – proba orală
20 august 2009	Limba și literatura română – proba A – proba scrisă
21 august 2009	Limba și literatura maternă – proba C – proba scrisă
24 august 2009	Proba obligatorie a profilului – proba D – proba scrisă
25 august 2009	O probă la alegere din aria curriculară corespunzătoare specializării – proba E – probă scrisă sau practică
26 august 2009	O probă la alegere dintre disciplinele din celelalte arii curriculare corespunzătoare specializării – proba F – probă scrisă sau practică
28 august 2009	Afișarea rezultatelor (până la 16:00) și depunerea contestațiilor (orele 16:00 – 20:00)
30 august - 2 septembrie 2009	Rezolvarea contestațiilor
3 septembrie 2009	Afișarea rezultatelor finale

Anexa 1 la Ordinul nr. 5168/29.VIII.2008, privind aprobarea calendarului și a metodologiei de organizare și desfășurare a examenului de bacalaureat - 2009

Programa de bacalaureat –2009
Matematică, TIPUL M1
Filiera: teoretică, profil: real, militar, specializarea: matematică-informatică

I. Statutul disciplinei

Matematica este disciplină obligatorie de examen – proba **d** și disciplină la alegere din profilul opus – proba **f**.

II. Competențe de evaluat

1. Folosirea corectă a terminologiei specifice matematicii în contexte variate de aplicare
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice
3. Utilizarea corectă a algoritmilor matematici și a raționamentelor în rezolvarea de probleme cu diferite grade de dificultate
4. Exprimarea și redactarea corectă și coerentă în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme
5. Analiza unei situații problematice și determinarea ipotezelor necesare pentru obținerea concluziei
6. Generalizarea unor proprietăți prin modificarea contextului inițial de definire a problemei sau prin îmbunătățirea sau generalizarea algoritmilor

În plus, se vor avea în vedere și competențele specifice din programa școlară.

III. Conținuturi

Clasa a IX-a

Mulțimi și elemente de logică matematică. Funcții. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ (șir). Funcții; lecturi grafice. Funcția de gradul I. Funcția de gradul al II-lea. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea. Vectori în plan. Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană. Elemente de trigonometrie. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană.

Clasa a X-a

Mulțimi de numere. Funcții și ecuații. Metode de numărare. Matematici financiare. Geometrie. (Nu se cer: *Variabile aleatoare, scheme clasice de probabilitate: schema lui Poisson și schema lui Bernoulli.*)

Clasa a XI-a

Elemente de calcul matricial și sisteme de ecuații liniare. **Permutări. Matrice. Determinanți. Sisteme de ecuații liniare.**

Elemente de analiză matematică. **Limite de funcții. Continuitate. Derivabilitate. Reprezentarea grafică a funcțiilor.**

Clasa a XII-a

Elemente de algebră. **Grupuri. Inele și corpuri. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim).**

Elemente de analiză matematică. **Primitive. Integrala definită. Aplicații ale integralei definite.**

METODOLOGIA

de organizare și desfășurare a examenului de bacalaureat – 2009

I. DISPOZIȚII GENERALE

Art.1 - (1) Examenul de bacalaureat este modalitatea de evaluare a cunoștințelor, a competențelor, a nivelului de cultură generală și de specializare, atins de absolvenții de liceu.

(2) Dreptul de a susține bacalaureatul îl au elevii care au promovat ciclul superior al liceului, indiferent de forma de învățământ.

(3) Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului, numit în continuare M.E.C.T., organizează în fiecare an școlar, potrivit legii, două sesiuni de bacalaureat.

(4) M.E.C.T. organizează în fiecare an școlar o sesiune specială de bacalaureat, pentru elevii din clasa a XII-a/a XIII-a participanți la loturile olimpice și la competițiile sportive și artistice internaționale. Calendarul sesiunii speciale se aprobă prin ordin al ministrului Educației, Cercetării și Tineretului.

(5) Pentru elevii claselor a XI-a și a XII-a din secțiile bilingve francofone, M.E.C.T. organizează probele pentru obținerea mențiunii speciale „secție bilingvă francofonă" pe diploma de bacalaureat, conform unei metodologii specifice.

Art.2 - (1) Promovarea examenului de bacalaureat permite accesul în învățământul superior.

(2) În urma promovării examenului de bacalaureat, absolventului i se eliberează diplomă de bacalaureat.

(3) Absolvenții care au promovat toate clasele liceale cu medii generale de minimum 9,50, iar la examenul de bacalaureat au obținut media 10, primesc diplomă de merit.

Art.3 - (1) Candidații proveniți din învățământul de stat au dreptul să susțină examenul de bacalaureat, fără taxă, de cel mult două ori. Prezentările ulterioare la examen sunt condiționate de achitarea unor taxe.

(2) Candidații proveniți din învățământul particular vor susține examenul de bacalaureat, cu taxă, în centrele de examen stabilite de inspectoratele școlare județene/al municipiului București.

(3) Taxele de examen menționate la alineatele (1) și (2) se stabilesc anual, până la data de 15 aprilie, de către M.E.C.T.

Art.4 - (1) Candidații care au participat, dar nu au promovat examenul de bacalaureat în sesiunile de bacalaureat organizate începând cu anul 2003, pot solicita recunoașterea unora dintre probele orale, scrise sau practice, promovate în sesiunile din anii menționați.

(2) Elevii care, în una dintre clasele a IX-a – a XII-a, au obținut premii la concursuri/olimpiade școlare internaționale recunoscute de către M.E.C.T. au posibilitatea de a-și echivala, la cerere, proba de examen a cărei disciplină a fost inclusă în programa de concurs. Echivalarea se face cu nota maximă.

(3) Recunoașterea/echivalarea probelor se face de către directorul unității respective, în urma solicitării scrise a candidatului și, după caz, a prezentării dovezilor privind obținerea premiului la concursul/ olimpiada internațională, depuse, în momentul înscrierii, la secretariatul unității de învățământ.

V. CONŢINUTUL EXAMENULUI DE BACALAUREAT ŞI STABILIREA PROBELOR

Art.35 Disciplinele de studiu la care se organizează probele pentru examenul de bacalaureat sunt stabilite conform legii.

Art.36 - (1) Conform Legii Învăţământului nr. 84/1995, republicată, cu modificările şi completările ulterioare, examenul naţional de bacalaureat constă în susţinerea a două, respectiv, a trei probe comune şi a trei probe diferenţiate, în funcţie de filieră şi de profil.

Probele comune sunt următoarele:

proba A - limba şi literatura română - scris şi oral;

proba B - una dintre limbile moderne de circulaţie internaţională, studiate în liceu - oral;

proba C - limba maternă, scris şi oral, pentru elevii care au urmat studiile liceale într-o limbă a minorităţilor naţionale;

- limba şi literatura într-o limbă de circulaţie internaţională, scris şi oral, pentru elevii care au urmat studiile liceale cu limba de predare în limba de circulaţie internaţională respectivă.

Probele de examen, diferenţiate în funcţie de filieră, de profil, de specializare/calificare profesională şi de opţiunea elevului, sunt următoarele:

Filiera teoretică

Profil umanist:

proba D - istorie sau geografie - probă scrisă;

proba E - o probă, la alegere, din aria curriculară corespunzătoare specializării - probă scrisă;

proba F - o probă, la alegere, dintre disciplinele din celelalte arii curriculare, alta decât cele susţinute anterior - probă scrisă/probă practică.

Profil real:

proba D - matematică - probă scrisă;

proba E - o probă, la alegere, din aria curriculară corespunzătoare specializării - probă scrisă;

proba F - o probă, la alegere, dintre disciplinele din celelalte arii curriculare, alta decât cele susţinute anterior - probă scrisă/probă practică.

Filiera tehnologică

proba D - matematică – pentru toate profilurile şi specializările - probă scrisă;

proba E - o probă, la alegere, din aria curriculară "Tehnologii", în funcţie de calificarea profesională a elevului - probă scrisă;

proba F - o probă, la alegere, dintre disciplinele din celelalte arii curriculare, alta decât cele alese anterior - probă scrisă/probă practică.

Filiera vocaţională

proba D - istorie sau geografie, respectiv matematică, în funcţie de profil - probă scrisă;

proba E - o probă, la alegere, din ariile curriculare specifice profilului şi specializării - probă scrisă/probă practică;

proba F - o probă, la alegere, dintre disciplinele din celelalte arii curriculare, alta decât cele alese anterior - probă scrisă/probă practică.

(2) Aprobarea listei disciplinelor la alegere menţionate în lege, precum şi a programelor disciplinelor de examen, se face prin ordin al ministrului Educaţiei, Cercetării şi Tineretului.

(3) Candidaţii pot alege pentru probele D, E şi F una dintre disciplinele **studiate în liceu**, din lista stabilită de M.E.C.T. pentru fiecare filieră/profil/specializare/ calificare profesională.

(4) La proba comună B – una dintre limbile moderne de circulaţie internaţională studiate în liceu – elevii pot alege oricare limbă modernă studiată în liceu, indiferent dacă a fost studiată drept limba 1, limba a 2-a sau limba a 3-a de studiu, dacă a fost studiată în regim normal, intensiv, bilingv ori dacă a fost disciplină obligatorie sau opţională. Examenul se susţine în conformitate cu programa de bacalaureat pentru limba aleasă, valabilă pentru respectiva sesiune de bacalaureat şi care corespunde nivelului (L1, L2 sau L3) şi formei în care a fost studiată de către candidat limba respectivă (normal, intensiv, bilingv).

(5) Precizările de la alin. (4) se aplică şi în cazul în care candidatul optează pentru susţinerea unei limbi străine la proba scrisă E sau la proba F.

(6) În cadrul examenului de bacalaureat, elevii nu pot susţine o aceeaşi disciplină la probe diferite.

Art.37 - (1) Pentru candidaţii proveniţi din promoţiile anterioare, se face asimilarea specializării absolvite cu una dintre specializările/calificările profesionale în vigoare pentru promoţia curentă.

(2) Pentru filiera teoretică, promoţiile de la învăţământ de zi, de până în anul 2002 inclusiv, sau de la învăţământ seral sau cu frecvenţă redusă, de până în anul 2003 inclusiv, asimilarea specializărilor se face astfel:

Specializare	Specializare asimilată
Limbi moderne Limbi clasice	Filologie
Istorie – ştiinţe sociale	Ştiinţe sociale
Matematică - fizică	Matematică – informatică
Fizică – chimie Chimie - biologie	Ştiinţe ale naturii

(3) Pentru filierele tehnologică şi vocaţională, asimilarea specializărilor se face de către comisia judeţeană de bacalaureat, după analiza comparativă a planurilor-cadru parcurse de candidat şi a planurilor-cadru în vigoare pentru absolvenţii promoţiei 2009.

Art.38 - (1) Subiectele pentru probele scrise de examen se elaborează de către Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preunivesitar şi se stabilesc ţinându-se seama de următoarele criterii:

a) să fie în concordanţă cu programele şcolare şi cu programele de bacalaureat, aprobate şi publicate de M.E.C.T.;

b) să fie proiectate astfel încât tratarea lor să angajeze cât mai multe posibilităţi de analiză, de sinteză şi de generalizare din partea candidaţilor;

c) să asigure o cuprindere echilibrată a materiei studiate, să aibă grad de complexitate corespunzător conţinutului programelor şcolare şi al programelor de bacalaureat, pentru a fi tratate în timpul stabilit, să solicite demonstrarea competenţelor prevăzute în aceste programe;

d) să permită tratarea lor în timpul acordat candidaţilor pentru rezolvare la probele scrise: 3 ore;

e) baremele de evaluare se elaborează astfel încât să se asigure unitatea de evaluare la nivel naţional.

(2) Pentru fiecare probă scrisă se elaborează categorii de itemi. Varianta pentru subiectul fiecărei probe scrise va fi generată prin combinarea categoriilor de itemi.

(3) Categoriile de itemi se postează pe site-ul M.E.C.T. la data de 1 martie.

Art.39 - (1) Subiectele pentru probele orale se elaborează de către Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preunivesitar; subiectele cuprind teme și/ sau texte. corespunzătoare conținuturilor asociate competențelor din programele pentru bacalaureat.
(2) Subiectele de pe biletele de examen oral vor avea un grad de complexitate care să permită tratarea lor integrală în maximum 10-15 minute.

Art.40 - (1) Subiectele pentru examenul de bacalaureat se clasifică în categoria documentelor secret de serviciu din momentul demarării acțiunii de elaborare a acestora și până în momentul în care devin publice. Toate acțiunile referitoare la elaborarea, traducerea și transmiterea către centrele de examen vor fi menționate într-o procedură care se va elabora în concordanță cu legislația în vigoare.
(2) Modalitatea de transmitere a subiectelor la centrele de examen va fi reglementată printr-o procedură separată.
(3) Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preunivesitar asigură traducerea variantelor de subiecte în limbile minorităților naționale.
(4) Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preunivesitar va posta pe web-site structura subiectelor pentru probele scrise și a biletelor pentru probele orale, precum și precizările metodologice referitoare la cerințe și la modalitățile de evaluare ale acestora la data de 30 noiembrie 2008.

VI. ORGANIZAREA ȘI DESFĂȘURAREA PROBELOR

Probele orale

Art.41 - (1) La probele orale/practice, candidații intră în sala de examen în ordinea afișată, respectându-se criteriul alfabetic și ora prevăzută pentru fiecare grupă. La proba orală de limbi moderne, examinarea candidaților se va realiza în ordinea categoriilor de subiecte, corespunzătoare nivelului de studiu specific disciplinelor respective. Fiecare candidat prezintă comisiei documentul de identitate și fișa individuală pentru consemnarea rezultatelor la examinările orale și practice. Comisia de bacalaureat verifică identitatea fiecărui candidat.
(2) Se interzice candidaților să pătrundă în sală cu orice fel de lucrări: manuale, dicționare, notițe, însemnări etc., care ar putea fi utilizate pentru rezolvarea subiectelor, precum și cu telefoane mobile și cu orice mijloc electronic de calcul sau de comunicare. Nerespectarea dispozițiilor referitoare la introducerea de materiale interzise în sala de examen duce la eliminarea din examen a candidatului de către președintele comisiei de examen, indiferent dacă materialele interzise au fost folosite sau nu.
(3) La probele orale, candidatul extrage un bilet și primește hârtie ștampilată pentru ciornă. El **are dreptul la un al doilea bilet, caz în care nota va fi scăzută cu un punct.**
(4) Pentru elaborarea răspunsurilor se acordă fiecărui candidat 10 – 15 minute. La examenul oral de limba și literatura maghiară (proba C) candidații pot folosi culegeri de texte. Pentru a preveni eventuale fraude, acestea vor fi verificate înainte de începerea examenului de către comisia de examinare.
(5) Eventualele fraude sau tentative de fraudă la probele orale/practice vor fi comunicate imediat președintelui comisiei. Acesta este obligat să verifice și să ia măsurile ce se impun, care pot merge până la eliminarea candidatului din examen.
(6) Comisia județeană de bacalaureat/a municipiului București va fi informată, imediat, despre orice situație specială.

Art.42 Desfășurarea probelor orale are caracter public. Persoanele străine care asistă la desfășurarea acestor probe vor respecta procedurile prevăzute la art.20, alin.(2).

Probele scrise

Art.43 (1) La probele scrise, sălile vor fi, în prealabil, adaptate acestor activități, prin:
a) dotarea corespunzătoare; se va avea în vedere amenajarea sălilor, astfel încât în fiecare sală de examen să existe cel puțin 15 candidați;
b) eliminarea oricăror materiale didactice care i-ar putea influența pe candidați în elaborarea răspunsurilor orale sau a lucrărilor scrise;
c) afișarea pe ușa fiecărei săli a listei nominale cu candidații repartizați în sala respectivă și a prevederilor metodologiei, care îi informează pe aceștia că pătrunderea în sală cu materiale ajutătoare, cu telefoane mobile sau cu mijloace electronice de calcul sau de comunicare, frauda sau tentativa de fraudă atrag după sine eliminarea din examen;
d) afișarea, pe ușa fiecărei săli, a prevederilor din metodologie care îi informează pe elevi că subiectele rezolvate pe ciornă sau pe foaia cu subiectele fotocopiate nu se iau în considerare.
(2) Comisia din centrul de examen va lua toate măsurile ca și în celelalte spații la care au acces candidații, înainte sau în timpul examenului, să nu se afle materiale care pot ajuta candidații la elaborarea răspunsurilor.

Art.44 - (1) Înaintea intrării în săli, președintele comisiei din centrul de examen instruiește asistenții în legătură cu îndatoririle ce le revin, cu prevederile metodologiei de organizare și desfășurare a examenului de bacalaureat, cu informațiile pe care trebuie să le furnizeze candidaților aflați în săli.
(2) La încheierea instructajului, participanții vor semna un proces-verbal, care se va arhiva, alături de celelalte documente ale examenului.
(3) Repartizarea în săli a celor doi asistenți – cadre didactice de altă specialitate decât cea la care se susține examenul, din altă unitate de învățământ decât cea din care provin candidații, se face de către președintele comisiei, prin tragere la sorți în ziua fiecărei probe, cu trei sferturi de oră înainte de începerea acesteia, luându-se măsuri să nu rămână aceleași formații de asistență în zile diferite și nici aceiași asistenți pentru aceleași săli, la probe diferite.
(4) Asistenții, care intră în săli după ce au fost instruiți și au semnat fișa de atribuții, primesc din partea președintelui listele cu candidații, procesul-verbal de predare-primire a lucrărilor scrise, hârtie tipizată pentru lucrări și hârtie ștampilată pentru ciorne. Numărul de coli de examen și numărul de coli pentru ciorne, primite pentru fiecare sală de examen, vor fi consemnate în procesul-verbal de instruire, care va fi semnat de fiecare asistent în parte și de președintele comisiei.
(5) Se interzice asistenților să pătrundă în sală cu telefoane mobile sau cu mijloace electronice de calcul sau de comunicare, precum și cu ziare, reviste, cărți.

Art.45 - (1) Accesul candidaților în săli este permis pe baza actului de identitate, cel mai târziu cu 30 de minute înainte de începerea probei.
(2) Se interzice candidaților să pătrundă în sală cu orice fel de lucrări: manuale, dicționare, notițe, însemnări etc., care ar putea fi utilizate pentru rezolvarea subiectelor, precum și cu orice mijloc electronic de calcul sau de comunicare. Candidații pot introduce în săli și pot folosi în timpul examenului doar acele materiale a căror posibilitate de utilizare este menționată explicit în metodologie și pe foaia care conține subiectul de examen, respectiv **dicționar** la disciplina **limba latină**, sau

planul de conturi la disciplina **contabilitate**. Asistenţii vor verifica respectarea acestei prevederi înainte de aducerea subiectelor în săli. Nerespectarea dispoziţiilor referitoare la introducerea de materiale interzise în sala de examen duce la eliminarea din examen a candidatului de către preşedintele comisiei de examen, indiferent dacă materialele interzise au fost folosite sau nu, şi, după caz, la sancţionarea asistenţilor.

(3) Înainte de aducerea subiectelor în săli, asistenţii vor explica elevilor modul de desfăşurare a probei şi modul de completare a datelor personale pe foaia tipizată.

(4) Candidaţii se aşază **câte unul în bancă**, în ordine alfabetică, în funcţie de disciplina şi de tipul de subiect primit, conform listelor afişate. Fiecare candidat primeşte o coală de hârtie tipizată, pe care îşi scrie cu majuscule numele, prenumele tatălui, toate prenumele personale, în ordinea în care sunt trecute în actul de identitate şi completează citeţ celelalte date de pe colţul ce urmează a fi lipit. Colţul colii tipizate va fi lipit, după distribuirea subiectelor în săli, numai după ce asistenţii din săli au verificat identitatea candidaţilor, după completarea corectă a tuturor datelor prevăzute şi după ce aceştia semnează în interiorul porţiunii care urmează a fi sigilată. Colţurile lucrărilor vor fi lipite numai după ce candidaţii au început să scrie pe foaia de concurs rezolvarea subiectelor. Procedura anterioară se repetă pentru toate colile tipizate utilizate de candidat pentru a redacta lucrarea. Candidaţii vor primi atâtea coli tipizate şi ciorne marcate cu ştampila "Bacalaureat 2009 – C.E." câte le sunt necesare. Pentru lipirea colţului lucrării se va folosi lipici sau acelaşi tip de etichete autocolante, pentru toate centrele de examen dintr-un judeţ.

Preşedintele comisiei aplică ştampila-tip "Bacalaureat 2009 – C.E." peste colţul închis şi lipit al lucrării. În cazul în care se organizează o subcomisie în altă locaţie, ştampila este aplicată de către membrul comisiei din centrul de examen, desemnat pentru a participa la examen în acea subcomisie. Aceste operaţii se vor încheia înaintea ieşirii primului candidat din sala de examen.

(5) Înscrierea numelui candidatului pe foile tipizate în afara rubricii care se sigilează, precum şi orice alte semne distinctive, care ar permite identificarea lucrării, atrag după sine anularea lucrării scrise respective.

Art.46 - (1) După anunţarea variantei de subiect extrasă de Comisia Naţională de Bacalaureat, se multiplică subiectele în număr egal cu numărul candidaţilor, urmând ca acestea să fie distribuite în săli. Candidaţii care susţin probele în limbile minorităţilor naţionale vor primi simultan subiectul atât în limba maternă, cât şi în limba română.

(2) Comisia de examen va lua toate măsurile pentru a pregăti în mod corespunzător operaţia de multiplicare, astfel încât să fie asigurat, în cel mai scurt timp posibil, câte un subiect pentru fiecare candidat.

(3) Asistenţii primesc subiectele multiplicate, în plicuri sigilate, de la preşedinte, vicepreşedinte, secretar sau un membru al comisiei şi le distribuie fiecărui candidat. La încheierea acestor operaţiuni, începe rezolvarea subiectelor de către candidaţi.

(4) Asistenţii verifică primirea de către fiecare candidat a tipului de subiect, corespunzător filierei, profilului, specializării/calificării profesionale şi opţiunii, la care are dreptul conform prevederilor prezentei metodologii.

(5) Niciun membru al comisiei nu poate părăsi centrul de examen până la încheierea probei, exceptând cazurile speciale – cazuri medicale, accidente, situaţii de forţă majoră. Candidaţii care doresc să predea lucrările înainte de expirarea timpului maxim prevăzut de prezenta metodologie pentru rezolvarea subiectelor pot părăsi centrul de examen cel mai devreme după o oră şi jumătate de la distribuirea subiectelor în săli.

VIII. STABILIREA REZULTATELOR FINALE ŞI REZOLVAREA CONTESTAŢIILOR

Art.58 - (1) După încheierea probelor din cadrul examenului de bacalaureat şi după evaluarea şi notarea tuturor lucrărilor scrise, se comunică rezultatele finale pentru toţi candidaţii.

(2) Pentru fiecare candidat care a obţinut cel puţin nota **5 (cinci)** la toate probele orale, scrise sau practice de examen, se calculează media generală de bacalaureat ca medie aritmetică, cu două zecimale, fără rotunjire, din notele obţinute la respectivele probe.

(3) Pentru candidaţii din seriile precedente, care au solicitat recunoaşterea unor probe orale care au fost evaluate cu calificativul „admis", şi care au obţinut cel puţin nota 5 (cinci) la fiecare din celelalte probe, se calculează media generală de bacalaureat ca medie aritmetică, cu două zecimale, fără rotunjire, din notele obţinute la probele orale, scrise sau practice de examen, care au fost apreciate cu note.

(4) Nu se calculează media generală pentru candidaţii care nu au promovat una sau mai multe probe, care nu s-au prezentat la toate probele sau care au fost eliminaţi la o probă.

(5) Se consideră promovat la examenul de bacalaureat, candidatul care a obţinut cel puţin nota 5 sau calificativul „admis" la fiecare probă orală, a obţinut cel puţin nota 5 la fiecare probă scrisă sau practică de examen şi are media generală minimum **6 (şase)**. În acest caz, candidatul este declarat „reuşit". Pentru candidaţii care obţin media generală 5,99, media generală se rotunjeşte la 6,00.

(6) Candidaţii care s-au prezentat la toate probele de examen, dar nu îndeplinesc simultan condiţiile menţionate la alin.(5), precum şi candidaţii care s-au prezentat la unele, dar nu la toate probele de examen sunt declaraţi „respinşi".

(7) Candidaţii care au fost eliminaţi de la o probă, nu mai pot participa la probele următoare şi sunt declaraţi „eliminaţi din examen", **fără posibilitatea recunoaşterii, în sesiunile următoare, a notelor la probele promovate anterior eliminării**. Se consideră că aceşti candidaţi nu au promovat examenul de bacalaureat.

(8) Pentru comunicarea rezultatelor finale ale bacalaureatului se întocmesc şi se afişează liste nominale care cuprind: numele şi prenumele candidaţilor, notele obţinute la fiecare probă scrisă, practică sau orală, media generală, acolo unde este cazul, şi rezultatul final: „reuşit"/„respins"/„neprezentat"/„eliminat din examen".

Art.59 Pentru candidaţii proveniţi de la alte licee decât cel în care este organizat centrul de examen, comisia de examen întocmeşte extrase din catalog, care cuprind situaţia lor la examen şi le transmit liceelor respective, în vederea completării diplomelor de bacalaureat.

Art.60 - (1) La probele orale şi practice, nu se admit contestaţii, cu excepţia probei de dicteu melodic şi armonic, de la profilul artistic – muzică.

(2) Contestaţiile la probele scrise se depun şi se înregistrează la centrul de examen, în perioada prevăzută de calendarul examenului de bacalaureat.

(3) Preşedintele, împreună cu unul dintre vicepreşedinţi, cu secretarul sau cu un membru al comisiei din centrul de examen, primesc contestaţiile şi le înregistrează.

(4) Cererile prin care se contestă notele obţinute la evaluarea iniţială, însoţite de un borderou în care se precizează numele contestatarilor şi probele, respectiv, disciplina/disciplinele pentru care este depusă contestaţia se înaintează comisiei din centrul zonal de evaluare, de către un delegat al comisiei din centrul de examen.

(5) După centralizarea cererilor prin care se contestă notele obţinute la evaluarea iniţială, lucrările se secretizează. Secretizarea se face, în toate centrele zonale de evaluare din judeţ, cu acelaşi tip de hârtie pusă la dispoziţie de comisia judeţeană de bacalaureat/a municipiului Bucureşti.

După aceasta, se aplică ştampila „Bacalaureat 2009 – C.Z.E.", iar lucrările se înaintează, prin delegat, comisiei judeţene de bacalaureat/a municipiului Bucureşti.

Aceasta numerotează lucrările contestate, pentru fiecare probă scrisă, disciplină şi tip de subiect şi le transmite comisiei judeţene/a municipiul Bucureşti/regionale de contestaţii, singura în măsură să acorde o nouă notă lucrării. Totodată, se transmite un borderou în care se menţionează proba de examen, disciplina, tipul de subiect, numărul de ordine al lucrărilor şi numărul de pagini pentru fiecare lucrare contestată.

Art.61 -(1) Comisiile judeţene/ a municipiul Bucureşti/ regionale de contestaţii reevaluează lucrările primite şi acordă note lucrărilor contestate, conform baremelor de evaluare pentru probele scrise.

(2) Toate procedurile privind desfăşurarea activităţii în centrele zonale de evaluare sunt respectate şi în cazul comisiei judeţene de contestaţii.

(3) După terminarea evaluării şi deschiderea lucrărilor, preşedintele comisiei de contestaţii analizează notele acordate după reevaluare, în comparaţie cu cele acordate iniţial. În situaţia în care se constată diferenţe de notare mai mari de **1,50 puncte**, în plus sau în minus, între notele de la evaluarea iniţială şi cele de la contestaţii, preşedintele comisiei de contestaţii decide reevaluarea lucrărilor respective de către o a treia comisie, formată din alţi profesori cu experienţă, alţii decât cei care au evaluat iniţial lucrările în centrul de contestaţii. Reevaluarea se va face după o nouă secretizare a lucrărilor, respectând cu stricteţe baremul de evaluare şi toate procedurile de evaluare. Nota acordată de a treia comisie este nota care va fi acordată de comisia de contestaţii.

(4) Hotărârile comisiei judeţene de contestaţii/a municipiului Bucureşti se consemnează într-un proces-verbal care se semnează de către membrii comisiei şi de preşedinte.

(5) Lucrările scrise se restituie centrelor zonale de evaluare, împreună cu o copie de pe procesul-verbal. În cazul organizării centrelor regionale de contestaţii, documentele sunt predate delegaţilor comisiilor judeţene/a municipiului Bucureşti de bacalaureat din judeţele arondate centrului respectiv de contestaţii. O copie a procesului-verbal în care sunt consemnate deciziile comisiei de contestaţii este predată de comisia din centrul de evaluare, respectiv de comisia judeţeană de bacalaureat delegatului fiecărui centru de examen care a înaintat cereri de reevaluare a lucrărilor scrise. Borderourile de evaluare de la comisia de contestaţii şi procesul-verbal se păstrează la sediul inspectoratului şcolar respectiv timp de doi ani.

Art. 62 - (1) Pentru lucrările care au primit iniţial note cuprinse între 4,50 – 4,99, inclusiv notele de 4,50 şi 4,99, sau o notă cel puţin egală cu 9,50, nota definitivă este nota acordată de către comisia de contestaţii.

(2) Pentru lucrările care au primit iniţial, la comisia din centrul zonal de evaluare, alte note decât cele menţionate la aliniatul (1), nota definitivă este nota acordată de comisia judeţeană de contestaţii/a municipiului Bucureşti, dacă între nota iniţială şi nota acordată la contestaţii se constată o diferenţă de cel puţin 0,50 puncte. Dacă diferenţa dintre cele două note este mai mică de 0,50 puncte, nota definitivă este nota iniţială, acordată de comisia din centrul zonal de evaluare.

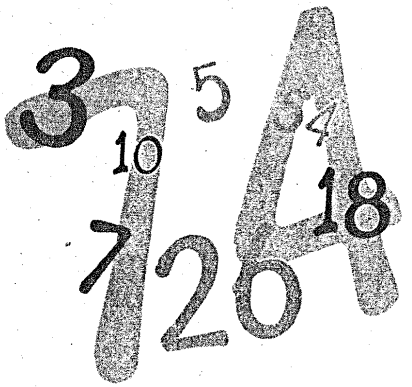
(3) Nota definitivă, acordată în conformitate cu procedura menţionată la alin. (1) şi (2), nu mai poate fi modificată şi reprezintă nota obţinută de candidat la proba respectivă.

(4) Comisiile de bacalaureat din centrele de examen operează în catalogul electronic schimbările care se impun după aflarea rezultatelor la contestaţii, recalculează, după caz, media generală de bacalaureat şi rectifică în mod corespunzător rezultatul examenului.

(5) Rezultatele la contestaţii se comunică celor în drept prin afişare la avizierul centrului de examen, conform calendarului.

SUBIECTUL I

Capitolul conţine prima categorie de subiecte, reprezentând 100 de grupuri de itemi, pentru disciplina **Matematică**, proba **D**, tipul de programă de examen **MT1.**



Notă.

Varianta finală a unei probe scrise la examenul de bacalaureat se va stabili prin extragerea din urne a trei numere, de la 1 la 100. Acestea corespund numărului de ordine al grupului de itemi din fiecare categorie de subiecte. Astfel, varianta finală a unei probe scrise va fi formată din 3 grupuri de itemi de categorii diferite, marcate prin denumirea: Subiectul I, Subiectul II şi Subiectul III. Ca punctaje, acestora le sunt atribuite câte 30 de puncte. Punctajul total al variantei de subiecte este de 100 de puncte, la cele 90 de puncte, cât însumează cele trei subiecte, adăugându-se 10 puncte din oficiu.

VARIANTA 1

5p **1.** Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+...+x=231$.

5p **2.** Să se rezolve inecuația în mulțimea numerelor reale $2x^2-5x+3\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A, care conțin elementul 1.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

Soluții

1. $1+5+9+...+x=231$. Se observă că termenii sunt în progresie aritmetică cu $a_1=1$ și $r=4$. Atunci $x=1+4(k-1)$, unde k reprezintă numărul de termeni. Rezultă $1+5+9+...+(4k-3)=231$; $\frac{k(4k-2)}{2}=231$; $2k^2-k-231=0$. Cum $k\in\mathbb{N}^*$ rezultă $k=11$, de unde $x=41$.

2. Inecuația $2x^2-5x+3\le 0$, se mai scrie $(2x-3)(x-1)\le 0$.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2-5x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

. Rezultă $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

3. $f:(0,+\infty)\to(1,+\infty)$; $f(x)=x^2+1$; cum f este bijectivă, atunci este și inversabilă. Avem $f(x)=y$, unde $x\in(0,+\infty)$ și $y\in(1,+\infty)$. Atunci $x^2+1=y$, de unde $x^2+1-y=0$. Rezultă că $\forall y\in(1,+\infty),\exists x=\pm\sqrt{y-1}$. Dar $x\in(0,+\infty)$, atunci $x=\sqrt{y-1}$. Deci $f^{-1}:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$.

4. Submulțimile de trei elemente din A care conțin 1 sunt de forma $\{a, b, 1\}$, $a, b\in A\setminus\{1\}$ deci avem $C_9^2=36$ submulțimi.

5. $AB=\sqrt{(2-m)^2+(m+2)^2}$. Rezultă $8+2m^2=16$, adică $m^2=4$, de unde $m\in\{\pm 2\}$.

6. $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(2\pi-\frac{23\pi}{12}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$.

VARIANTA 2

5p **1.** Să se arate că $(1-i)^{24}$ este real.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to(1,\infty)$, $f(x)=e^x+1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor de două cifre, să avem $a\neq b$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1), B(2,0), C(0,6)$.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

Soluții

1. $(1-i)^2=1-2i-1=-2i$; $(1-i)^{24}=\left[(1-i)^2\right]^{12}=(-2i)^{12}=2^{12}$.

2. Din $\frac{3x-1}{x+1}=3-\frac{x+1}{2x-1}, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$, obținem ecuația $x^2-6x+5=0, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$, având soluțiile $x\in\{1,5\}$.

3. $f:\mathbb{R}\to(1,\infty), f(x)=e^x+1$; cum f este bijectivă, avem $f^{-1}:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\ln(x-1)$.

4. Numere de două cifre sunt în total 90 (de la 10 la 99).
Numerele pentru care $a=b$ sunt 9 (și anume: 11, 22, 33, ..., 99), deci sunt 81 numere cu $a\neq b$. Atunci $P=\frac{81}{90}=\frac{9}{10}$.

5. Fie M mijlocul lui (BC). Atunci $x_M=\frac{2+0}{2}=1$ și $y_M=\frac{0+6}{2}=3$, adică $M(1,3)$.
Rezultă $d(A,M)=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-3)^2}=5$.

6. Dacă $\vec{u}\perp\vec{v}$, atunci $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Rezultă $m(m-2)-3=0$. Cum $m>0$, atunci $m=3$.

SUBIECTUL I

VARIANTA 3

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$.

5p **2.** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-8x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1)+\lg(6x-5)=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta sa fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6,4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d:2x-3y+1=0$.

5p **6.** Știind că $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

Soluții

1. Numerele mai pot fi scrise $\sqrt{2}=\sqrt[12]{64}; \sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{256}; \sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{125}$. Rezultă $\sqrt{2}<\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}$.

2. $\min f(x)=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-48}{16}=-3$.

3. Avem condițiile: $x-1>0$, și $6x-5>0$, de unde $x\in(1,+\infty)$. Ecuația devine $\lg[(x-1)(6x-5)]=\lg 100$, adică $(x-1)(6x-5)=100$; $6x^2-11x-95=0$, de unde $x_1=5, x_2=-\frac{19}{6}$. Cum $x>1$ rezultă $x=5$.

4. Avem 90 de numere de câte două cifre și 6 pătrate perfecte $(4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2)$.
Atunci $P=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

5. Panta dreptei d este $m_d=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$. Fie $B\in d$ astfel încât $AB\perp d$. Atunci $m_{AB}\cdot m_d=-1$, de unde $m_{AB}=-\frac{3}{2}$. Ecuația dreptei AB va fi $AB: y-4=-\frac{3}{2}(x-6)$; $AB: 3x+2y-26=0$.

6. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$.

VARIANTA 4

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei $y=x^2+5x+1$ este situat în cadranul III.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=-(5a-1)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC știind că $AB=6$, $AC=10$ și că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

Soluții

1. $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2=\left(\frac{2i}{(1-i)(1+i)}\right)^2=i^2=-1\in\mathbb{R}$.

2. Avem $V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$, de unde $V\left(-\frac{5}{2};-\frac{21}{4}\right)$ este situat în cadranul III.

3. Notăm $3^x=y$, $y>0$ și obținem $3y^2-10y+3=0$. Atunci $\Delta=64$, de unde $y_{1,2}=\frac{10\pm 8}{6}$. Cum $y>0$, obținem $y_1=\frac{1}{3}$ și $y_2=3$, de unde $x\in\{-1,\ 1\}$.

4. Există 900 de numere cu trei cifre (de la 100 la 999). Numerele cu trei cifre distincte sunt $A_{10}^3-A_9^2=648$.
Numere cu toate cifrele egale sunt 9.
Numere cu exact două cifre egale sunt $900-648-9=243$. Atunci $P=\frac{243}{900}=\frac{27}{100}$.

5. Din $-a(5a-1)+2(a+1)=0$ obținem $-5a^2+3a+2=0$, de unde $a\in\left\{1,-\frac{2}{5}\right\}$.

6. $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=30\sin A=15\sqrt{3}$. Rezultă $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, adică $m(\hat{A})=60^\circ$.
Din teorema cosinusurilor obținem $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$, adică $BC=2\sqrt{19}$.

VARIANTA 5

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1-2i}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuația $x^2-10x+12\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(1,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=3\log_2 x$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ cu proprietatea că $f(1)=f(4)$.

5p **5.** Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ dacă $A(-2,9), B(7,-4), C(8,-3)$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $B=\frac{\pi}{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Să se calculeze lungimea laturii AC.

Soluții

1. $\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1-2i}=\frac{2}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2}{1-4i^2}=\frac{2}{5}$.

2. Din $x^2-10x+12\le 0$ și $x\in\mathbb{Z}$ rezultă $x\in[5-\sqrt{13},5+\sqrt{13}]\cap\mathbb{Z}$, adică $x\in\{2,3,...,8\}$.

3. $f(x)=y$; $3\log_2 x=y$. Obținem $x=2^{\frac{y}{3}}$ adică $x=\sqrt[3]{2^y}>1$, de unde $y>0$.
Atunci $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2^x}$, cu $f^{-1}:(0,\infty)\to(1,\infty)$.

4. Dacă $f:A\to B$ și A,B mulțimi finite astfel încât $\text{card}A=a$, $\text{card}B=b$, atunci numărul funcțiilor $f:A\to B$ este b^a. Cum $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ astfel încât $f(1)=f(4)$, atunci numărul funcțiilor este $4^3=64$.

5. Fie O mijlocul lui (AC). Atunci $x_O=\frac{-2+8}{2}=3$ și $y_O=\frac{9-3}{2}=3$. Deci $O(3;3)$. Dar O este mijlocul și lui (BD). Atunci $3=\frac{7+x_D}{2}$, de unde $x_D=-1$ și $3=\frac{-4+y_D}{2}$, de unde $y_D=10$. Deci $D(-1;10)$.

6. Avem ΔABC, $B=\frac{\pi}{3}$, rezultă $m(\widehat{AOC})=\frac{2\pi}{3}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului. Din teorema cosinusului obținem
$AC^2=OA^2+OC^2-2\cdot OA\cdot OC\cdot\cos A\hat{O}C=1+1-2\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=3$, de unde $AC=\sqrt{3}$.
Sau: cu teorema sinusurilor $\frac{AC}{\sin\hat{B}}=2R$, de unde $AC=\sin\hat{B}\cdot 2R=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$.

VARIANTA 6

5p **1.** Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul al doilea știind că $f(-1)=1, f(0)=1, f(1)=3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $(0,\pi)$ ecuația $\sin 3x=\sin x$.

5p **4.** Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2, 4, 6, 8\}$?

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1,2), B(2,-2)$ și $C(4,6)$. Să se calculeze $\cos B$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $C=\frac{\pi}{6}$ și $AB=6$.

Soluții

1. Fie $A=\{x \mid x\in M_{11}, x\in[10,99]\}$.

Atunci $A=\{11\cdot 1, 11\cdot 2, \ldots, 11\cdot 9\}=\{11,22,\ldots,99\}$, rezultă

$S=11(1+2+\ldots+9)=11\cdot\frac{9\cdot 10}{2}=495$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$; $a,b,c\in R, a\neq 0$. Avem $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3, \\ a-b+c=1 \end{cases}$

de unde $a=b=c=1$ adică $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

3. $\sin 3x-\sin x=0$, $2\sin x\cos 2x=0\Rightarrow \sin x=0$ sau $\cos 2x=0$. Cum $x\in(0,\pi)$, rezultă $x=\frac{\pi}{4}$ sau $x=\frac{3\pi}{4}$.

4. $A_4^3=24$.

5. Avem $AB=\sqrt{17}=c$, $AC=5=b$, $BC=\sqrt{68}=2\sqrt{17}=a$. Din teorema cosinusului rezultă $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{15}{17}$.

6. Dacă $C=\frac{\pi}{6}$, atunci $m(\widehat{AOB})=\frac{\pi}{3}$; unde O este centrul cercului circumscris triunghiului. Rezultă că ΔAOB este echilateral, de unde $R=AB=6$.

Sau: din teorema sinusurilor: $2R=\frac{AB}{\sin C}=6\cdot 2$, de unde $R=6$.

VARIANTA 7

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{8+i}{7-4i}$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+6x-9$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x=-\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1,2,\ldots,n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se știe că în triunghiul ABC vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ au același modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5.

Soluții

1. $\left|\frac{8+i}{7-4i}\right|=\left|\frac{4+3i}{5}\right|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=1$.

2. $f_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}=0$.

3. Dacă $\sin x=-\frac{1}{2}$, atunci $x\in\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. Avem $C_n^2=120$. Rezultă $\frac{n(n-1)}{2}=120$; $n^2-n-240=0$, având soluțiile -15 și 16. Cum $n\geq 2$, rămâne doar $n=16$.

5. Avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul laturii BC. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. Atunci $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2\cdot AM$, de unde $AM=\frac{BC}{2}$. Rezultă că ΔABC este dreptunghic, $m(\hat{A})=90^\circ$.

6. Avem $p=\frac{3+4+5}{2}=6$. Cum $5^2=3^2+4^2$, rezultă că ΔABC este dreptunghic, de unde $S=\frac{3\cdot 4}{2}=6$. Atunci $r=\frac{S}{p}=\frac{6}{6}=1$.

VARIANTA 8

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2=-4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+x+c$. Știind că punctele $A(1,2)$ și $B(0,3)$ aparțin graficului funcției f, să se determine numerele reale a și c.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{7x+1}-x=1$.

5p **4.** Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FE}$. Să se demonstreze că punctele A, F și C sunt coliniare.

5p **6.** Fie triunghiul ABC. Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC știind că $AB=13$, $AC=14$ și $BC=15$.

Soluții

1. Avem $z^2+4=0$. Rezultă $(z+2i)(z-2i)=0$, de unde $z_1=2i$; $z_2=-2i$.

2. Dacă $A,B\in G_f$, atunci $f(0)=3$ și $f(1)=2$, adică $\begin{cases}c=3\\a+1+c=2\end{cases}$, de unde $\begin{cases}c=3\\a=-2\end{cases}$.

3. Ecuația se mai scrie $\sqrt[3]{7x+1}=1+x$, iar prin ridicare la cub, se obține $x^3+3\cdot x^2-4x=0$ având soluțiile $x\in\{-4,0,1\}$.

4. $A_5^4=120$.

5. $\frac{DE}{FE}=3$. Atunci $\overrightarrow{FE}=\frac{\overrightarrow{DE}}{3}$; $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}}{3}$; $\overrightarrow{FA}=\frac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}-3\overrightarrow{AE}}{3}$;

$\overrightarrow{FA}=\frac{\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{EA}}{3}$; $\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AD}+2\cdot\overrightarrow{AE}}{3}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$. Rezultă că A, F, C coliniare.

6. Avem $p=\frac{a+b+c}{2}=21$. Atunci $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=84$. Avem $S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}=84$, de unde $h_a=\frac{2\cdot 84}{15}=\frac{56}{5}$.

VARIANTA 9

5p **1.** Să se determine numărul natural x pentru care $1+3+5+\ldots+x=225$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m știind că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanța 3.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2^{-x+1}+1\right)=x$.

5p **4.** Să se arate că $C_{17}^3>C_{17}^{15}$.

5p **5.** Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 90^\circ=\frac{91}{2}$.

Soluții

1. $x=2n-1$, unde n este numărul de termeni ai șirului.

$S_n=1+3+5+\ldots+2n-1=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$ de unde se obține $n^2=225$, adică $n=15$.

Deci $x=2n-1=29$.

2. Condiția ca ecuația $x^2+mx-2m=0$ să aibă 2 soluții reale este $\Delta=m^2+8m>0$.

Din $|x_1-x_2|=3$ obținem $(x_1-x_2)^2=9$, de unde $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9$, adică $m^2+8m-9=0$ cu soluțiile $m_1=-9$ și $m_2=1$, care verifică $\Delta>0$.

3. Din $\log_2(2^{-x+1}+1)=x$ rezultă $2^{-x+1}+1=2^x$, adică $(2^{-x})\cdot 2+1=2^x$. Notăm $2^x=y>0$ și obținem $\frac{2}{y}+1=y$, de unde $y^2-y-2=0$; $\Delta=9$ cu soluțiile $y_1=2$ sau $y_2=-1<0$, de unde se obține $x=1$.

4. $C_{17}^{15}=C_{17}^2$; $C_{17}^3=\frac{17!}{3!\cdot 14!}=\frac{17!}{2!\cdot 15!}\cdot\frac{15}{3}=C_{17}^2\cdot 5$, deci $C_{17}^3=C_{17}^2\cdot 5>C_{17}^2=C_{17}^{15}$.

5. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$. Dar $|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{BC}|$ și $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$, deci $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}$, adică $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BC}$ și prin urmare $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=3\overrightarrow{BC}=12$.

6. Se folosește formula $\sin x=\cos(90^\circ-x)$.

$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 90^\circ=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+\ldots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+$

$+\cos^2 45^\circ+1=44+\frac{2}{4}+1=\frac{182}{4}=\frac{91}{2}$.

VARIANTA 10

5p **1.** Știind că $z\in\mathbb{C}$ și că $z^2+z+1=0$, să se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul întâi pentru care $f(f(x))=2f(x)+1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1)-\lg 9=1-\lg x$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(3+\sqrt[3]{3}\right)^{10}$.

5p **5.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, știind că $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -1)$.

5p **6.** Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u}=5\vec{i}-4\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$ este obtuz.

Soluții

1. Din $z^2+z+1=0$ rezultă $z^3=1$, adică $z^4=z$, deci $z^4+\frac{1}{z^4}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{-z}{z}=-1$.

2. Fie $f(x)=ax+b, a\neq 0$. Atunci $f(f(x))=a^2x+ab+b$ și $2f(x)+1=2ax+2b+1$. Avem $a^2x+ab+b=2ax+2b+1$, de unde $(a^2-2a)x=b-ab+1$. Adică $a^2-2a=0$ și $b-ab+1=0$. Cum $a\neq 0$ obținem $a=2$ și $b=1$, de unde $f(x)=2x+1$.

3. Condiții: $x+1>0$ și $x>0\Rightarrow x>0$. Cum $1=\lg 10$, ecuația devine $\lg\frac{x+1}{9}=\lg\frac{10}{x}$, de unde $\frac{x+1}{9}=\frac{10}{x}$. Rezultă $x^2+x-90=0$. Cum $x>0$, rămâne $x=9$.

4. $T_{k+1}=C_{10}^k\cdot 3^{10-k}\cdot 3^{\frac{k}{3}}$. Termenii raționali se obțin pentru $k\vdots 3$, adică pentru $k\in\{0,3,6,9\}$. Obținem 4 termeni raționali.

5. $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

6. $\vec{u}\cdot\vec{v}=5\cdot 2+(-4)\cdot 3=-2$; $\cos(\vec{u}\cdot\vec{v})=\frac{-2}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{13}}<0$, atunci $(\widehat{\vec{u}\cdot\vec{v}})\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. Deci unghiul format de cei doi vectori este obtuz.

VARIANTA 11

5p **1.** Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ știind că numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică și 2, 17, a sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se rezolve ecuația $f(f(x))=0$ știind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\operatorname{tg}(-x)=1-2\operatorname{tg}x$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$ care verifică relația $f(2)=2$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E astfel încât $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$. Să se arate că dreptele DE și BC sunt paralele.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, dacă $A=\frac{\pi}{4}$, $B=\frac{\pi}{6}$ și $AB=6$.

Soluții

1. Dacă 2, a, b sunt în progresie geometrică, atunci $a^2=2b$. Dacă 2, 17, a sunt în progresie aritmetică, atunci $a+2=2\cdot 17$. Se obține $a=32$ și $b=512$.

2. Dacă $f(x)=y$ ecuația devine $-3y+2=0$, având soluția $y=\frac{2}{3}$. Din $-3x+2=\frac{2}{3}$, obținem $x=\frac{4}{9}$.

3. Cum funcția tg este impară, avem $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$. Ecuația devine $\operatorname{tg}x=1$, de unde, pentru $x\in[0;2\pi)$, obținem $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$.

4. $f(0), f(1)\in\{0, 1, 2\}$, deci se pot forma $3^2=9$ funcții.

5. Din reprezentarea punctelor D și E avem $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, iar conform reciprocei teoremei lui Thales, obținem $DE\parallel BC$.

6. $C=\pi-A-B=\frac{7\pi}{12}$; $\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Conform teoremei sinusurilor, $R=\frac{c}{2\sin C}$, de unde $R=3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

VARIANTA 12

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{7}{6}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\cos 2x=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $a>0$ știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.

5p **5.** Să se determine ecuația simetricei dreptei $d: 2x-3y+1=0$ față de punctul $A(-3,4)$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{ctg} x=3$, să se calculeze $\operatorname{ctg} 2x$.

Soluții

1. $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}=\frac{1-i+1+i}{1-i^2}=1$.

2. Ecuația devine $\frac{2x^2+8x+7}{x^2+5x+6}=\frac{7}{6}$, de unde $5x^2+13x=0$. Obținem $x\in\left\{-\frac{13}{5},0\right\}$.

3. Din $2x\in[0,4\pi)$ și $\cos 2x=\frac{1}{2}$ deducem că $2x\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right\}$;

$x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. Termenul din mijloc este T_7; $T_7=C_{12}^6\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{12-6}\cdot\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^6=C_{12}^6\cdot\sqrt{a}=924\sqrt{a}=1848$,

de unde $a=4$.

5. Deoarece $m_d=\frac{2}{3}$, avem și $m_{d'}=\frac{2}{3}$. Fie $M(1;1)\in d$, $M'=s_A(M)$ obținem

$M'(-7,7)$; $y-7=\frac{2}{3}(x+7)$; $d': 2x-3y+35=0$.

6. $\operatorname{ctg} 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}=\frac{\operatorname{ctg} x}{2}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}\right)=\frac{4}{3}$.

VARIANTA 13

5p **1.** Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2$ este număr întreg.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y=4\\xy=3\end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x=6\left(\sqrt{x-2}-1\right)$.

5p **4.** Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,0)$ la dreapta $d: 3x-4y+1=0$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=4, BC=5$ și $CA=6$.
Să se arate că $m(\sphericalangle B)=2m(\sphericalangle C)$.

Soluții

1. $(1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2=1-3+1-3=-4\in\mathbb{Z}$.

2. Obținem ecuația $a^2-4a+3=0$ având soluțiile x și y, de unde $a\in\{1,3\}$. Atunci $(x,y)\in\{(1,3),(3,1)\}$.

3. Condiție: $x\geq 2$. Ecuația se mai scrie $6\sqrt{x-2}=x+6$, care prin ridicare la pătrat devine $x^2-24x+108=0$, de unde $x\in\{6,18\}$.

4. $T_{k+1}=C_9^k(x^2)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_9^k x^{18-3k}$, iar din $18-3k=0$ obținem $k=6$ deci

$T_7=C_9^6=84$.

5. $d(A,d)=\frac{|3\cdot 3+(-4)\cdot 0+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$.

6. Din teorema cosinusurilor avem $\cos B=\frac{1}{8}$ și $\cos C=\frac{3}{4}$. Cum

$\cos 2C=2\cos^2 C-1=\frac{1}{8}$; obținem $\cos B=\cos 2C$, de unde $m(\sphericalangle B)=2m(\sphericalangle C)$.

VARIANTA 14

5p **1.** Să se calculeze $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+\ldots+\lg\frac{99}{100}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care $(a-3)x^2-ax-a<0$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[3]{9-4x}$.

5p **4.** Să se determine numărul elementelor unei mulțimi știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei AB știind că $A(2,3)$ și $B(-5,4)$.

5p **6.** Triunghiul ABC ascuțitunghic are $AC=2\sqrt{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 2. Să se determine măsura unghiului B.

Soluții

1. Suma se mai scrie $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)=\lg\frac{1}{100}=-2$.

2. Expresia $(a-3)x^2-ax-a<0$, oricare $x\in\mathbb{R}$, este adevărată dacă $(a-3)<0$ și $\Delta<0$, adică $a\in(-\infty,3)$ și $5a^2-12a<0$. Din $5a^2-12a<0$, obținem $a\in\left(0;\frac{12}{5}\right)$.

Deci $a\in\left(0;\frac{12}{5}\right)$.

3. Prin ridicare la cub, obținem: $8-x=9-4x$, de unde $x=\frac{1}{3}$.

4. Avem $C_n^2=45$, cu $n\geq 2$; obținem $\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=45$, de unde $\frac{n(n-1)}{2}=45$ și atunci $n=10$.

5. Avem $m_{AB}=-\frac{1}{7}$; obținem $y-3=-\frac{1}{7}(x-2)$, deci AB: $x+7y-23=0$.

6. Din $\frac{AC}{\sin B}=2R$, obținem $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde $m(\hat{B})=60^\circ$.

VARIANTA 15

5p **1.** Să se calculeze $\log_3(5-\sqrt{7})+\log_3(5+\sqrt{7})-\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa Ox în punctul $(1,0)$ și trece prin punctul $(0,2)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x+\cos x=0$.

5p **4.** Câte numere de patru cifre se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2,2)$ și este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2,1)$, $D(-1,-3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

Soluții

1. $\log_3(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})=\log_3 18$; $\log_3 18-\log_3 2=\log_3 9=2$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$; din $f(0)=2$ obținem $c=2$, din $f(1)=0$ obținem $a+b=-2$, iar din $\Delta=0$ obținem $a=2$; atunci $a=2$, $b=-4$, $c=2$, deci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x+2$.

3. Pentru $\cos x\neq 0$ obținem $\frac{\sin x}{\cos x}=-1$, adică $\operatorname{tg}x=-1$. Atunci $x\in\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$.

4. Numărul cerut este dat de numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,3,5,7,9\}$, adică $5^4=625$ funcții. Deci 625 numere.

5. Fie $d\parallel CD$. $m_{CD}=\frac{-3-1}{-1-2}=\frac{4}{3}$, rezultă $m_d=\frac{4}{3}$ și cum $A\in d$, obținem d: $y-2=\frac{4}{3}(x+2)$, de unde $4x-3y+14=0$.

6. Cum $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, atunci $\sin^2\alpha=\frac{144}{169}$, $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, rezultă că $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$.

VARIANTA 16

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\dfrac{2-i}{2+i}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $x^2+ax+2\geq 0$ oricare ar fi numărul real x.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuația $\arcsin\dfrac{1}{2}+\arcsin x=\dfrac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_n^8=C_n^{10}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 10$.

5p **5.** Să se afle măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC știind că $A(2,-2)$, $B(2,3)$, $C(-2,3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

Soluții

1. $\left|\dfrac{2-i}{2+i}\right|=\left|\dfrac{3-4i}{5}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=1$.

2. Pentru $x^2+ax+2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, avem $\Delta=a^2-8$ și punând condiția $\Delta\leq 0$, obținem $a\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$.

3. Ecuația devine $\dfrac{\pi}{6}+\arcsin x=\dfrac{\pi}{3}$, de unde $\arcsin x=\dfrac{\pi}{6}$. Obținem $x=\dfrac{1}{2}$.

4. Avem $\dfrac{n!}{(n-8)!\cdot 8!}=\dfrac{n!}{(n-10)!\cdot 10!}$, de unde $8!(n-8)!=10!(n-10)!$. Rezultă $n^2-17n-18=0$, și cum $n\geq 10$, obținem $n=18$.

5. Avem $AB=5$; $BC=4$; $CA=\sqrt{41}$. Cum $AB^2+BC^2=AC^2$, rezultă că ΔABC este dreptunghic și $B=\dfrac{\pi}{2}$.

6. Din $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, obținem $\cos^2\alpha=\dfrac{16}{25}$. Cum $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, rezultă $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$. Atunci $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{24}{25}$.

VARIANTA 17

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ este întreg.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-2x+1}=5$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ și este perpendiculară pe dreapta $d:5x-4y+1=0$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că $AB=6$, $B=\dfrac{\pi}{4}$ și $C=\dfrac{\pi}{6}$.

Soluții

1. Avem

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot i\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot\left(i\sqrt{3}\right)^2+\left(i\sqrt{3}\right)^3=1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i=-8\in\mathbb{Z}$.

2. Notăm $x^2-x+2=y$. Rezultă $x^2-x+2-y=0$. Ecuația în x are soluții dacă $\Delta\geq 0$.

$\Delta=1-4(2-y)=4y-7$. Obținem $\operatorname{Im} f=\left[\dfrac{7}{4},+\infty\right)$.

3. Condiție: $x\leq\dfrac{1}{2}$; $-2x+1=25$, de unde $x=-12$.

4. Numere de două cifre sunt 90 (de la 10 la 99). Numere cu suma cifrelor 4 sunt 4 (13, 22, 31, 40). Probabilitatea este $P=\dfrac{4}{90}=\dfrac{2}{45}$.

5. Avem $m_d=\dfrac{5}{4}$. Cum $d\perp d'$, atunci $m_d\cdot m_{d'}=-1$, de unde $m_{d'}=-\dfrac{4}{5}$.

$d':y-1=-\dfrac{4}{5}(x+1)$, adică $4x+5y-1=0$.

6. $A=\pi-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{12}$;

$\sin A=\sin\dfrac{7\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Aplicând teorema sinusurilor obținem: $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$, adică

$\dfrac{6}{\frac{1}{2}}=\dfrac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{BC}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$, de unde $AC=6\sqrt{2}$ și $BC=3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

Rezultă că $P=6+6\sqrt{2}+3\sqrt{6}+3\sqrt{2}=3(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

VARIANTA 18

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2-2x+4=0$.

5p **2.** Să se afle valoarea minimă a funcției f, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuația $\arcsin x+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr k din mulțimea $\{0,1,2,...,7\}$, numărul C_7^k să fie prim.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=4\vec{i}+(a+4)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$, știind că $A(-3,4)$, $B(4,-3)$ și $C(1,2)$.

Soluții

1. Din $x^2-2x+4=0$ obținem $\Delta=4-16=-12$, $x_{1,2}=\frac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2}$. Deci $x\in\{1\pm i\sqrt{3}\}$.

2. Cum $a=1>0$, funcția f are punct de minim. Valoarea minimă este $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4}$, deci $\min f=-\frac{1}{4}$.

3. Cum $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$, rezultă că $\arcsin x=\frac{\pi}{4}$, de unde $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Din mulțimea dată obținem egalitățile: $C_7^0=C_7^7=1$; $C_7^1=C_7^6=7$; $C_7^2=C_7^5=21$; $C_7^3=C_7^4=35$. Așadar, numai 7 este număr prim, deci $P=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

5. Din $\vec{u}$ și $\vec{v}$ vectori coliniari obținem $\frac{a}{4}=\frac{3}{a+4}$, de unde $a\in\{-6,2\}$.

6. Avem $\overrightarrow{AB}(7,-7)$; $\overrightarrow{AC}(4,-2)$; $\overrightarrow{BC}(-3,5)$; Atunci $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})(1;3)$, de unde $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})=7\cdot 1+(-7)\cdot 3=-14$.

VARIANTA 19

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3},\sqrt[3]{5},\sqrt[4]{8}$.

5p **2.** Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că graficul său și graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+3$, sunt simetrice față de dreapta $x=1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** Să se determine ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, unde $A(1,2)$, $B(2,3)$ și $C(2,-5)$.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{ctg}2=\frac{\operatorname{ctg}1-\operatorname{tg}1}{2}$.

Soluții

1. Avem $(\sqrt{3})^{12}=3^6=729$; $(\sqrt[3]{5})^{12}=5^4=625$; $(\sqrt[4]{8})^{12}=8^3=512$. Rezultă $\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.
Dacă $g(1)=0$, atunci $f(1)=0$, adică $a+b=0$.
Dacă $g(0)=3$, atunci $f(0)=-3$, adică $b=-3$. Atunci $f(x)=3x-3$.

3. Notăm $3^x=y$. Atunci ecuația devine $3y^2-30y+27=0$ având soluțiile $y\in\{1,9\}$, de unde $x\in\{0,2\}$.

4. Avem $9\cdot 10\cdot 10=900$ cazuri posibile și $4\cdot 5\cdot 5=100$ cazuri favorabile, deci $P=\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$.

5. Fie A' mijlocul lui (BC). Atunci $x_{A'}=\frac{2+2}{2}=2$ și $y_{A'}=\frac{3-5}{2}=-1$.

$m_{AA'}=\frac{-1-2}{2-1}=-3$. Atunci $AA':y-2=-3(x-1)$; adică $3x+y-5=0$.

6. Știm că $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$, de unde $\operatorname{ctg}2x=\frac{1}{\operatorname{tg}2x}=\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{2\operatorname{tg}x}$, iar

$\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}{2}=\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\operatorname{tg}x}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{2\operatorname{tg}x}$. Rezultă $\operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}{2}$, iar pentru $x=1$ se obține egalitatea cerută.

VARIANTA 20

5p **1.** Să se arate că $2\in\left(\log_3 4,\sqrt{5}\right)$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2-2x+2=0$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x+\cos x=-1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_4^4+C_5^4+C_6^4$.

5p **5.** Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{MB}$ și $MN\parallel BC$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{CN}=m\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului OAB, știind că $O(0,0)$, $A(-1,2)$ și $B(-2,3)$.

Soluții

1. $2=\sqrt{4}<\sqrt{5}$ și $2=\log_3 9>\log_3 4$, deci $2\in\left(\log_3 4,\sqrt{5}\right)$.

2. Din $x^2-2x+2=0$ obținem $\Delta=4i^2$, $x_{1,2}=\dfrac{2\pm 2i}{2}$; atunci $x\in\{1\pm i\}$.

3. Ridicând la pătrat egalitatea dată, obținem $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$, de unde $\sin x\cos x=0$;

$\sin x\cos x=0, x\in[0,2\pi)\Rightarrow x\in\left\{0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right\}$. Cum $\sin x+\cos x=-1\Rightarrow x\in\left\{\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

4. $C_4^4+C_5^4+C_6^4=1+5+15=21$.

5. Dacă $MN\parallel BC$, conform teoremei lui Thales, rezultă că $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\dfrac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NC}}=\dfrac{4}{1}$; $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{NC}}=\dfrac{5}{1}$;

$\dfrac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{AC}}=-\dfrac{1}{5}$, de unde $m=-\dfrac{1}{5}$.

6. $OA=\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$; $OB=\sqrt{(-2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$;

$AB=\sqrt{(-2+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$, de unde $P=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{13}$.

VARIANTA 21

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2-8x+25=0$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+1)x^2+3(a-1)x+a-1$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_8^4-C_7^4-C_7^3$.

5p **5.** Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul $A(1,2)$ pe dreapta $d: x+y-1=0$.

5p **6.** Știind că $\sin x=\dfrac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2x$.

Soluții

1. $\Delta=-36=36i^2$. Atunci $x_1=4+3i$, $x_2=4-3i$.

2. Condiția este ca $a+1\neq 0$ și discriminantul ecuației $(a+1)x^2+3(a-1)x+a-1=0$ să fie strict pozitiv. Obținem $\begin{cases}5a^2-18a+13>0\\ a\neq -1\end{cases}$, de unde $a\in(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{13}{5},+\infty\right)\setminus\{-1\}$.

3. Condiție: $x\geq 1$. $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-6\sqrt{x-1}+3^2}=\left|\sqrt{x-1}-3\right|$. Ecuația este echivalentă cu $\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1$, adică $\sqrt{x-1}\in\{4,2\}$. Obținem $x\in\{17,5\}$.

4. $C_8^4-C_7^4-C_7^3=70-35-35=0$.

5. Fie $d'\perp d$, $A\in d'$. Cum $m_d=-1$ rezultă că $m_{d'}=1$, iar ecuația dreptei d' va fi $x-y+1=0$.

6. $\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{7}{9}$.

VARIANTA 22

5p **1.** Să se calculeze $1+i+i^2+...+i^{10}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=2x-1$. Să se rezolve ecuația $(f\circ g)(x)=0$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg(x+9)+\lg(7x+3)=1+\lg(x^2+9)$.

5p **4.** Să se rezolve inecuația $C_n^2<10$, $n\geq 2$, n natural.

5p **5.** Se consideră dreptele paralele de ecuații $d_1: x-2y=0$ și $d_2: 2x-4y-1=0$. Să se calculeze distanța dintre cele două drepte.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$.

Soluții

1. $1+i+i^2+i^3+i^4+...+i^{10}=(1+i-1-i)+i^4(1+i-1-i)+i^8(1+i-1)=i$.

2. $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=0$; $f(g(x))=0$; $g^2(x)-3g(x)+2=0$ cu soluțiile $g(x)=1$, $g(x)=2$. De aici obținem soluțiile $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{2}$.

3. Din condițiile de existență ale ecuației, rezultă că $x>-\frac{3}{7}$. Cum $1=\lg 10$, ecuația se scrie $\lg[(x+9)(7x+3)]=\lg[10(x^2+9)]$, de unde rezultă că $3x^2-66x+63=0$, deci $x\in\{1,21\}$.

4. Din $C_n^2<10$ obținem $\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}<10$, adică $\frac{n(n-1)}{2}<10$. Atunci $n(n-1)<20$, de unde $n\in\{2,3,4\}$.

5. Cum $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{0}{-1}$, rezultă că $d_1\parallel d_2$. Considerăm un punct arbitrar pe dreapta d_1. Fie, de exemplu, $A(2,1)\in d_1$. Avem că $d(d_1,d_2)=d(A,d_2)=\frac{|2\cdot 2-4\cdot 1-1|}{\sqrt{4+16}}=$

$=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

6. $\sin 75^0+\sin 15^0=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\sin 45^0\cos 30^0=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

VARIANTA 23

5p **1.** Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_4-a_2=4$ și $a_1+a_3+a_5+a_6=30$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}$.

5p **3.** Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element n din mulțimea $\{1, 2, 3, ..., 40\}$, numărul $2^{n+2}\cdot 6^n$ să fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, dacă $A(5,-3), B(2,-1), C(0,9)$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}\alpha=2$, să se calculeze $\sin 4\alpha$.

Soluții

1. Suma primilor 20 de termeni ai progresiei este dată de $S_{20}=\frac{(2a_1+19r)}{2}\cdot 20$, unde $a_1=2$ și $r=2$. Se obține $S_{20}=420$.

2. Cu condițiile $x\neq\pm 2$, ecuația devine $(2x+3)(x-2)=(x+2)(x-1)$;

$2x^2-x-6=x^2+x-2$; $x^2-2x-4=0$, având soluțiile $x_1=1-\sqrt{5}$, $x_2=1+\sqrt{5}$.

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

4. Printre cele 40 de numere din mulțime sunt 20 de numere care îndeplinesc condiția dată, deci $P=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$.

5. $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$; $G\left(\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right)$.

6. $\sin 4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{2\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{1+\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2}=-\frac{24}{25}$.

VARIANTA 24

5p **1.** Să se calculeze $z+\frac{1}{z}$ pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(-1)=f(1)=0, f(2)=6$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\frac{11}{6}$.

5p **4.** Să se demonstreze că dacă $x\in\mathbb{R}$ și $|x|\geq 1$, atunci $(1+x)^2+(1-x)^2\geq 4$.

5p **5.** Să se determine ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC, știind că $A(0,9)$, $B(2,-1)$ și $C(5,-3)$.

5p **6.** Să se calculeze $(2\vec{i}+5\vec{j})\cdot(3\vec{i}-4\vec{j})$.

Soluții

1. $z+\frac{1}{z}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-1$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$; $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Din condițiile date, obținem $\begin{cases}a-b+c=0\\a+b+c=0\\4a+2b+c=6\end{cases}$, având soluția $a=2, b=0, c=-2$, de unde $f(x)=2x^2-2$.

3. Prin schimbarea bazei, obținem $\log_4 x=\frac{\log_2 x}{2}$ și $\log_8 x=\frac{\log_2 x}{3}$. Cu condiția $x>0$, ecuația dată se mai scrie $\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=\frac{11}{6}$. Rezultă că $\log_2 x=1$, de unde $x=2$.

4. $(1+x)^2+(1-x)^2=2+2x^2\geq 4$.

5. Panta dreptei AC va fi $m_{AC}=-\frac{12}{5}$ iar panta înălțimii din B va fi $m_{h_b}=\frac{5}{12}$. De aici, ecuația înălțimii cerute este $h_b: y+1=\frac{5}{12}(x-2)$, adică $h_b: 5x-12y-22=0$.

6. $(2\vec{i}+5\vec{j})(3\vec{i}-4\vec{j})=6-20=-14$.

VARIANTA 25

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.

5p **2.** Să se arate că pentru oricare $a\in\mathbb{R}^*$, dreapta $y=x+4$ intersectează parabola $y=ax^2+(a-2)x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{10,11,12,...,40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.

5p **5.** În triunghiul ABC punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor. Fie H ortocentrul triunghiului MNP. Să se demonstreze că $AH=BH=CH$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$.

Soluții

1. $(1-i)(1+2i)-3(2-i)=1+2i-i+2-6+3i=-3+4i$.

2. Din $ax^2+(a-2)x+1=x+4$ se obține $ax^2+ax-3x-3=0$, unde $\Delta=(a-3)^2+12a=(a+3)^2\geq 0$ pentru oricare $a\in\mathbb{R}^*$.

3. Notăm $2^x=t$, $t>0$. Atunci ecuația devine $t^2-6t+8=0$ și are soluțiile $t\in\{2,4\}$, de unde $x\in\{1,2\}$.

4. În mulțimea $\{10,11,12,...,40\}$ avem 10 numere divizibile cu 3, deci probabilitatea este $P=\frac{10}{31}$.

5. Fie h_M înălțimea ΔMNP din M, rezultă $h_M\perp NP$. Dar NP linie mijlocie, adică $NP\parallel AB$, de unde $h_M\perp AB$. Dar M mijlocul lui $[AB]$. Atunci h_M este mediatoarea lui $[AB]$. Analog, h_N mediatoarea lui $[BC]$ și h_P mediatoarea lui $[AC]$. Rezultă că intersecția înălțimilor ΔMNP coincide cu intersecția mediatoarelor ΔABC, de unde $HA=HB=HC$.

6. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

VARIANTA 26

5p **1.** Fie z_1 și z_2 soluțiile complexe ale ecuației $2z^2+z+50=0$. Să se calculeze $|z_1|+|z_2|$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x$. Să se arate că funcția $f\circ f\circ f$ este strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+9^x=2$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ și o funcție bijectivă $f:A\to A$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(1,-1)$. Să se determine ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ cu $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

Soluții

1. $\Delta=1-400=-399<0$, deci soluțiile sunt complexe și conjugate, așadar $|z_1|=|z_2|$. Cum $z_1\cdot z_2=25$ atunci $|z_1|+|z_2|=10$.

2. $f\circ f\circ f=f(f(f(x)))=-8x+3$, strict descrescătoare pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

3. Notăm $3^x=t$, $t>0$. Atunci ecuația devine $t^2+t-2=0$ cu soluțiile $t_1=1$, $t_2=-2$. Convine doar $t=1$, de unde $x=0$.

4. $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)=(-2)+(-1)+0+1+2=0$.

5. Mediatoarea segmentului $[AB]$, este perpendiculara pe AB dusă prin mijlocul segmentului. Fie M mijlocul lui $[AB]$. Atunci $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=0$; $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=1$.

Panta dreptei AB este $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{4}{-2}=-2$.

Panta mediatoarei este $m=-\frac{1}{m_{AB}}=\frac{1}{2}$.

Ecuația mediatoarei va fi $y-y_M=m(x-x_M)$; adică $y-1=\frac{1}{2}x$; $x-2y+2=0$.

6. Dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, atunci $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{8}$, de unde $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

VARIANTA 27

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+\ldots+i^6$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+x$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0;\infty)$ ecuația $\lg^2 x+5\lg x-6=0$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea $f(0)=f(1)=2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și $B(3,1)$. Să se determine măsura unghiului AOB.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\mathbb{R}$ și că $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

Soluții

1. $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6=1+i-1-i+1+i-1=i$; $|i|=1$.

2. $f_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{8}$

3. Notăm $\lg x=t$; ecuația devine $t^2+5t-6=0$. Obținem $t_1=1$, de unde $x_1=10$ și $t_2=-6$, de unde $x_2=10^{-6}$.

4. $f(2)\in\{0,1,2,3\}$, $f(3)\in\{0,1,2,3\}$, deci se pot forma $4^2=16$ funcții.

5. $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{5}$; $AO=\sqrt{x_A^2+y_A^2}=\sqrt{5}$, $BO=\sqrt{x_B^2+y_B^2}=\sqrt{10}$.

În ΔAOB, din teorema cosinusului rezultă: $\cos\hat{O}=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rezultă că $m(\widehat{AOB})=45^\circ$.

6. $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$; $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{9}$; $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{9}$.

Dar $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Rezultă că $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha=-\frac{8}{9}$.

VARIANTA 28

5p **1.** Să se calculeze $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x-3x^2$. Să se ordoneze crescător $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ și $f(2)$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2x-1}=3$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea că $f(0)$ este număr impar.

5p **5.** Fie triunghiul ABC și $M\in(BC)$ astfel încât $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și că $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

Soluții

1. $z=(1+i)^{10}+(1-i)^{10}=[(1+i)^2]^5+[(1-i)^2]^5=2^5i^5-2^5i^5=0$.

2. $f'=-6x+6$. Dacă $f'(x)=0$, atunci $x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$

f este strict crescătoare pe $(-\infty, 1]$ și strict descrescătoare pe $[1, \infty)$.

Cum $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$, rezultă că $f(2)<f(\sqrt{3})<f(\sqrt{2})$.

3. Din $\sqrt{2x-1}=3$ obținem $2x-1=9$, de unde $x=5$.

4. Dacă $f(0)=1$, atunci $f(1)$, $f(2)$, $f(3)\in\{0, 1, 2, 3\}$, deci se pot forma $4^3=64$ de funcții. Dacă $f(0)=3$, încă 64. Deci, în total, avem 128 de funcții.

5. Avem $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

6. Dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, atunci $\operatorname{tg}\alpha<0$; $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{9}{16}$. Rezultă $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$.

VARIANTA 29

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ este număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+2$. Să se rezolve inecuația $f(2x)\leqslant 0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x=\sqrt{2-x}$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, aceasta să aibă toate elementele impare.

5p **5.** Fie punctele $A(2, 0)$, $B(1, 1)$ și $C(3, -2)$. Să se calculeze $\sin C$.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

Soluții

1. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=|2+\sqrt{3}|+|2-\sqrt{3}|=4\in\mathbb{N}$.

2. Dacă $f(x)=0$, atunci $2x^2-5x+2=0$, de unde $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Cum $f(2x)\leqslant 0$, rezultă $x\in\left[\frac{1}{4},1\right]$.

3. Avem condițiile $\begin{cases}x\geqslant 0\\2-x\geqslant 0\end{cases}$, de unde $x\in[0, 2]$. Prin ridicare la pătrat ecuația devine $x^2=2-x$, adică $x^2+x-2=0$, având soluțiile $x_1=1$, $x_2=-2\notin[0; 2]$. Rezultă $x=1$.

4. Mulțimea A are $2^6-1=63$ submulțimi nevide, dintre care $2^3-1=7$ au toate elementele impare. Atunci $P=\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$.

5. $\sin C=\frac{1}{\sqrt{65}}$.

6. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$; $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=2$; $\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha+1=0$; $(\operatorname{tg}\alpha-1)^2=0$; $\operatorname{tg}\alpha=1$.

Atunci $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2}{2}=1$.

SUBIECTUL I

VARIANTA 30

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, aceasta să aibă produsul elementelor 120.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(3,4)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Soluții

1. Cum $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$, atunci $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$

$\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{100}-1-\sqrt{2}-$

$-\ldots-\sqrt{99}=\sqrt{100}-1=10-1=9\in\mathbb{N}$.

2. Intersecțiile cu axa Ox sunt $(x_1, 0)$ și $(x_2, 0)$, unde $x_{1,2}$ sunt rădăcinile ecuației $x^2-mx+2=0$. Deci $\Delta>0$, adică $m^2-8>0$, de unde $m\in(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},\infty)$.

3. Se impun condițiile $x>-1$ și $x>-3$, de unde $x\in(-1,+\infty)$.

$\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$; $\log_3[(x+1)(x+3)]=\log_3 3$, $(x+1)(x+3)=3$, adică $x^2+4x=0$, de unde $x_1=0$; $x_2=-4$. Verifică numai $x=0$.

4. Numărul submulțimilor nevide ale mulțimii A este $2^5-1=31$. Numărul submulțimilor care îndeplinesc condiția cerută este 2, deci $P=\frac{2}{31}$.

5. $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$; $G\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$.

6. Avem $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$. Atunci pentru $x=\frac{\pi}{4}$, rezultă $\cos\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$, de unde $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Cum $\sin\frac{\pi}{8}>0$, rezultă $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

SUBIECTUL I

VARIANTA 31

5p **1.** Știind că $\log_3 2=a$, să se demonstreze că $\log_{16}24=\frac{1+3a}{4a}$.

5p **2.** Să se determine două numere reale care au suma 1 și produsul -1.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}+2^{x+2}=160$.

5p **4.** Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ și $C(1,3)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 6<0$.

Soluții

1. $\log_{16}24=\frac{\log_3 24}{\log_3 16}=\frac{\log_3(2^3\cdot 3)}{\log_3 2^4}=\frac{1+3\log_3 2}{4\log_3 2}=\frac{1+3a}{4a}$.

2. Dacă $x_1+x_2=1$ și $x_1x_2=-1$ atunci x_1 și x_2 vor fi soluțiile ecuației $x^2-x-1=0$, adică $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

3. Notăm $2^x=t$, $t>0$, ecuația devine $2t^2+4t-160=0$; $t^2+2t-80=0$. Rezultă $t_{1,2}=-1\pm 9\begin{cases}8\\-10<0\end{cases}$. Atunci $2^x=8$, de unde $x=3$.

4. Avem 12 fete și 10 băieți. Rezultă $C_{12}^3\cdot C_{10}^2=9900$ moduri.

5. $m_{AB}=\frac{-1-1}{2-(-1)}=\frac{-2}{3}$. Cum $d\parallel AB$, atunci $m_d=-\frac{2}{3}$.

$d: y-3=-\frac{2}{3}(x-1)$, adică $2x+3y-11=0$.

6. Cum $\pi\simeq 3{,}14$ rezultă $6\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, deci 6 aparține cadranului IV al cercului trigonometric și atunci $\sin 6<0$.

VARIANTA 32

5p **1.** Se consideră numărul real $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2009}}$. Să se demonstreze că $s\in(1;2)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g(x)=-4x+1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x=1+\cos^2 x$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. Să se determine numărul funcțiilor pare $f:A\to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ și $C(1,3)$. Să se determine coordonatele punctului D știind că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Știind că $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ și că $\sin x=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin\frac{x}{2}$.

Soluții

1. Termenii sumei fiind în progresie geometrică cu rația $\frac{1}{2}$, rezultă că

$$s=\frac{1-\frac{1}{2^{2009}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{2009}}\in(1,2).$$

2. Rezolvând sistemul $\begin{cases}y=2x-1\\y=-4x+1\end{cases}$ obținem $y=-\frac{1}{3}$ și $x=\frac{1}{3}$, adică punctul de intersecție este $A\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

3. Cum $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, atunci $\sin x=1+1-\sin^2 x$; $\sin^2 x+\sin x-2=0$, de unde $(\sin x-1)(\sin x+2)=0$, $\sin x\in[-1,1]$, rezultă $\sin x=1$, de unde $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. Numărul funcțiilor pare $f:A\to A$ este 125.

5. Dacă $ABCD$ paralelogram, atunci mijlocul diagonalei AC coincide cu mijlocul diagonalei BD. Rezultă $\begin{cases}\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{x_B+x_D}{2}\\\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2}\end{cases}$, adică $\begin{cases}2+1=-1+x_D\\-1+3=1+y_D\end{cases}$, de unde $D(4,1)$.

6. Cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, atunci $\cos x<0$ și cum $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$ rezultă $\cos x=-\frac{4}{5}$.

Cum $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, atunci $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}=\frac{9}{10}$.

Cum $\frac{x}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\sin\frac{x}{2}>0$, de unde $\sin x=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

VARIANTA 33

5p **1.** Să se arate că numărul $\log_4 16+\log_3 9+\sqrt[3]{27}$ este natural.

5p **2.** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x+3\cdot 4^x=4$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt{n}\mid n\in\mathbb{N},\ n<100\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile lui a astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.

5p **6.** Știind că $x\in\mathbb{R}$ și că $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Soluții

1. $\log_4 16+\log_3 9+\sqrt[3]{27}=7$.

2. $\min f=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{16-24}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

3. Notând $4^x=y$ obținem ecuația $y^2+3y-4=0$ cu soluțiile -4 și 1.

Cum $4^x>0$, convine doar $4^x=1$, deci $x=0$.

4. Dacă $n\in\mathbb{N}$, atunci $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$ dacă și numai dacă n este pătrat perfect. În mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$ sunt 10 pătrate perfecte: $0^2, 1^2, 2^2, \dots, 9^2$. Probabilitatea cerută este $P=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0{,}1$.

5. Avem $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{CD}=(a-1)\vec{i}+\vec{j}$.

Atunci $AB\parallel CD$; $\frac{a-1}{-3}=\frac{1}{2}$; $a=-\frac{1}{2}$

6. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}$. Cum $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, atunci $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}=8+5\sqrt{3}$.

VARIANTA 34

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=(3+4i)^4$

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+2x+1$ se găsește pe dreapta de ecuație $x+y=0$.

5p **3.** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $\sin x=\sin 2x$ din intervalul $[0, 2\pi)$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcțiilor bijective $f:A\to A$ cu proprietatea că $f(1)=2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele AB și CD sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care are loc relația $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

Soluții

1. $|3+4i|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$; $|z|=\left|(3+4i)^4\right|=|3+4i|^4$; $|z|=5^4=625$.

2. Ecuația de gradul al doilea atașată funcției f are $\Delta=-4$. Fie $V(x_V,y_V)$ vârful parabolei asociate funcției f. Atunci $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ și $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{2}$.

Avem $x_V+y_V=0$.

3. $\sin x=2\sin x\cos x$; $\sin x(1-2\cos x)=0$; $\sin x=0$ sau $\cos x=\frac{1}{2}$;

Din $\sin x=0$, $x\in[0,2\pi)$ obținem $x\in\{0,\pi\}$. Din $\cos x=\frac{1}{2}$, $x\in[0,2\pi)$ obținem $x\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$. Deci ecuația are 4 soluții.

4. Numărul funcțiilor bijective $f:A\to A$ cu proprietatea $f(1)=2$ este $4!=24$.

5. Avem $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{CD}=(a-1)\vec{i}+\vec{j}$. Atunci $AB\perp CD$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$; $-3(a-1)+2=0$; $a=\frac{5}{3}$.

6. $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

$\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$; $\sqrt{2}\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$.

Cum $m(\hat{B}), m(\hat{C})\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ obținem $m(\hat{B})=m(\hat{C})$, adică triunghiul ABC este isoscel.

VARIANTA 35

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului $(2+i)^3+(2-i)^3$.

5p **2.** Graficul unei funcții de gradul al doilea este o parabolă care trece prin punctele $A(1,-3)$, $B(-1,3)$, $C(0,1)$. Să se calculeze valoarea funcției în punctul $x=2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3\cdot 4^x-6^x=2\cdot 9^x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,2009\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,-3)$ și $B(4,0)$. Să se calculeze distanța de la punctul O la dreapta AB.

5p **6.** Să se calculeze aria unui paralelogram $ABCD$ cu $AB=6$, $AD=8$ și $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ$.

Soluții

1. Dacă $z=(2+i)^3+(2-i)^3=(2^3+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3)+(2^3-3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2-i^3)=$
$=16-12=4$, atunci $|z|=4$.

2. $f(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=-3\\a-b+c=3\\c=1\end{cases}$ de unde $a=-1$ și $b=-3$, deci

$f(x)=-x^2-3x+1$, de unde $f(2)=-9$.

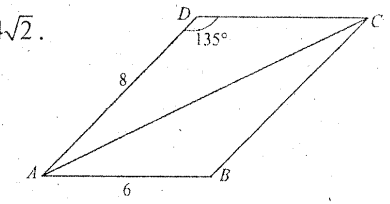
3. Ecuația se scrie $2\cdot 3^{2x}+2^x\cdot 3^x-3\cdot 2^{2x}=0$ și împărțind prin 2^{2x} se obține $2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-3=0$. Notăm $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Rezultă ecuația $2y^2+y-3=0$ cu soluțiile $y_1=1$ și $y_2=-\frac{3}{2}$. Cum $\left(\frac{3}{2}\right)^x>0$, convine doar $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1$, de unde $x=0$.

4. A are 2010 elemente; dintre acestea, 402 sunt divizibile cu 5. Atunci $P=\frac{402}{2010}=\frac{1}{5}$.

5. Cum $AO=3$, $BO=4$ și $AB=5$, rezultă că triunghiul AOB este dreptunghic în O.

Fie x distanța de la O la dreapta AB. Atunci $AO\cdot OB=x\cdot AB$. Rezultă $x=\frac{AO\cdot OB}{AB}$, de unde $x=\frac{12}{5}$.

6. $A_{ABCD}=AB\cdot AD\cdot\sin\widehat{BAD}=6\cdot 8\cdot\sin 45=24\sqrt{2}$.



VARIANTA 36

5p **1.** Se consideră numărul rațional $\frac{1}{7}$ scris sub formă de fracție zecimală infinită $\frac{1}{7}=0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se determine a_{60}.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$, $g(x)=3x+2$. Să se calculeze $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)$.

5p **3.** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3+1$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 50.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1,-2)$, $B(4,1)$ și $C(-1,a)$ sunt coliniare.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are $AB=3$, $AC=5$ și $BC=7$. Să se calculeze $\cos A$.

Soluții

1. Fie S suma cerută. Prin împărțire se obține că $\frac{1}{7}=0,(142857)$ și $a_{60}=7$.

2. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2-g(x)=-3x$;

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=3f(x)+2=8-3x$;

$(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)=-3x-(8-3x)=-8$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

3. Dacă f injectivă, atunci din $f(x)=f(y)$, rezultă că $x=y$.

Fie $x,y\in\mathbb{R}$ cu $f(x)=f(y)$. Rezultă că $3x^3+1=3y^3+1$; $(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$ de unde $x=y$, deci f este injectivă.

4. Sunt 900 de numere naturale de 3 cifre și 18 numere divizibile cu 50. Probabilitatea cerută este $P=\frac{18}{900}=\frac{1}{50}$.

5. Ecuația dreptei AB este: $y=x-3$.

Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, atunci $C\in AB$. Rezultă $a=-4$.

6. Din teorema cosinusului obținem $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$. Atunci $\cos A=-\frac{1}{2}$.

VARIANTA 37

5p **1.** Să se calculeze suma $1+4+7+...+100$.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Să se arate că numărul $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este natural.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2}+1\right)^5$.

5p **5.** Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin 105^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Soluții

1. $1+4+7+...+100=1+(1+3)+(1+2\cdot3)+...+(1+33\cdot3)=34+3(1+2+...+33)=$

$=34+\frac{3\cdot33\cdot34}{2}=1717$.

2. $\text{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R}\,/\,\exists x\in\mathbb{R}\text{ astfel încât }f(x)=y\}$.

Avem $f(x)=y$; $x^2+x+1-y=0$. Această ecuație are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta\geq0$. $\Delta=1-4(1-y)$; $\Delta\geq0$; $y\geq\frac{3}{4}$. În concluzie, $\text{Im}(f)=\left[\frac{3}{4};\infty\right)$.

3. $\arcsin\frac{1}{2}=a\Rightarrow a\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin a=\frac{1}{2}$; $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=b\Rightarrow b\in[0;\pi]$ și

$\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde $\sin b=+\sqrt{1-\cos^2 b}=\frac{1}{2}$; $\sin a+\sin b=1$ este natural.

4. $(\sqrt{2}+1)^5=\sum_{k=0}^{5}T_{k+1}$, unde $T_{k+1}=C_5^k\cdot(\sqrt{2})^{5-k}$, $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Obținem termeni raționali în cazul în care $5-k$ este par, adică pentru $k\in\{1,3,5\}$. Deci dezvoltarea conține 3 termeni raționali.

5. $ABCD$ pătrat $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, de unde $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

Atunci $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\|=2\cdot\|\overrightarrow{AC}\|=2\sqrt{2}$

6. Avem: $\sin 105^\circ=\sin(180^\circ-75^\circ)=\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin45^\circ\cdot\cos30^\circ+$

$+\cos45^\circ\cdot\sin30^\circ$.

$\sin105^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

VARIANTA 38

5p **1.** Să se arate că $\log_2 3\in(1,2)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2+3x+m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x+\cos(-x)=1$.

5p **4.** Să se arate că pentru orice număr natural n, $n\geqslant3$, are loc relația $C_n^2+C_n^3=C_{n+1}^3$.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuații $d_1:2x+3y+1=0$, $d_2:3x+y-2=0$ și $d_3:x+y+a=0$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=4$, $AC=3$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

Soluții

1. $2^1<3<2^2$, rezultă $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 2^2$, de unde $1<\log_2 3<2$.

2. $\Delta=9-4m$; $\Delta<0$, $m\in\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

3. Cum $\cos(-x)=\cos x$, avem

$\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde $x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este: $\{2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $C_n^2+C_n^3=\frac{n!}{(n-2)!\cdot2!}+\frac{n!}{(n-3)!\cdot3!}=\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}=\frac{(n-1)n}{2}\left(1+\frac{n-2}{3}\right)=$

$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$; $C_{n+1}^3=\frac{(n+1)!}{(n-2)!\cdot3!}=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$.

5. Din $2x+3y+1=0$, avem $y=\frac{-2x-1}{3}$; din $3x+y-2=0$, avem $y=2-3x$; din $\frac{-2x-1}{3}=2-3x$, obținem $x=1$, de unde $y=-1$. Avem $d_1\cap d_2=\{A(1;-1)\}$. Atunci dacă $A\in d_3$, rezultă că $1-1+a=0$, de unde $a=0$.

6. Din teorema cosinusului, $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Rezultă $BC=\sqrt{13}$. Perimetrul triunghiului ABC este $P=AB+BC+AC=7+\sqrt{13}$.

VARIANTA 39

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2=\bar{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $-x^2+4x-3\geq 0$.

5p **3.** Să se demonstreze că funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$ este injectivă.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

5p **5.** Fie ABC un triunghi care are $AB=2$, $AC=3$ și $BC=2\sqrt{2}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Soluții

1. $z^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\bar{z}$.

2. Avem $x^2-4x+3\leq 0$; $x_1=1$, $x_2=3$. Rezultă $x\in[1;3]$.

3. Din $f(x)=f(y)$, adică $x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}$, obținem $(x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=0$, de unde $x=y$ (deoarece $1-\frac{1}{xy}\neq 0$).

4. Avem $f(1)=0$ sau $f(1)=2$. În fiecare caz putem alege valorile $f(2)$ și $f(3)$ în 4^2 moduri (numărăm funcțiile $g:\{2,3\}\to\{0,1,2,3\}$). Sunt $2\cdot 4^2=32$ funcții cu proprietatea cerută.

5. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A$. Din teorema cosinusului, $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Rezultă $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}=\frac{5}{2}$.

6. $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$;

$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

VARIANTA 40

5p **1.** Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și numărul complex $z=\frac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine a pentru care $z\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Să se demonstreze că dreapta de ecuație $y=2x+3$ intersectează parabola de ecuație $y=x^2-4x+12$ într-un singur punct.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1}=x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din produsul cartezian $A\times A$, să avem egalitatea $a+b=6$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2,-1)$, $A(1,2)$ și $B(4,1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b$, pentru oricare $a,b\in\mathbb{R}$.

Soluții

1. Dacă $z\in\mathbb{R}$ atunci $\text{Im}(z)=0$;

$z=^{2-ai)}\frac{a+2i}{2+ai}=\frac{2a+2a+4i-a^2i}{4+a^2}=\frac{4a+(4-a^2)i}{4+a^2}=\frac{4a}{4+a^2}+\frac{4-a^2}{4+a^2}i$.

Dacă $\text{Im}(z)=0$ rezultă $4-a^2=0$, de unde $a=\pm 2$.

2. Rezolvăm sistemul $\begin{cases}2x+3=y\\x^2-4x+12=y\end{cases}$ și obținem o singură soluție: $\begin{cases}x=3\\y=9\end{cases}$.

Rezultă că dreapta de ecuație $2x+3=y$ intersectează parabola de ecuație $x^2-4x+12=y$ în punctul $P(3,9)$.

3. Punem condițiile $2x-1\geq 0$ și $x\geq 0$, adică $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$. Din $\sqrt{2x-1}=x$ obținem $2x-1=x^2$, adică $x^2-2x+1=0$. Soluția ecuației este $x=1$.

4. Produsul cartezian $A\times A$ are 36 de elemente: $A\times A=\{(1,1),(1,2),.....,(6,6)\}$. Cazurile favorabile sunt (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2) și (3, 3). Probabilitatea cerută este $P=\frac{5}{36}$.

5. $\overrightarrow{MA}=-\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{MB}=2\vec{i}+2\vec{j}$; de unde $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{i}+5\vec{j}$. Atunci $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\sqrt{26}$.

6. $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=$

$=\sin^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\sin^2 b=\sin^2 a(1-\sin^2 b)-(1-\sin^2 a)\sin^2 b=\sin^2 a-\sin^2 b$.

VARIANTA 41

5p **1.** Să se arate că numărul $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}$ este natural.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1}=-3^x+8$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ care au proprietatea că $f(1)+f(3)=7$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ și $B(-1,1)$. Să se determine ecuația dreptei ce trece prin originea axelor și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Fie a și b numere reale astfel încât $\sin a+\sin b=1$ și $\cos a+\cos b=\dfrac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

Soluții

1. $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}=2^2-3=1\in\mathbb{N}$.

2. $\mathrm{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R}\,/\,\exists x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y\}$. Pentru $y=0$ avem $f(0)=0$, iar pentru $y\neq 0$ avem: $f(x)=y$, adică $yx^2-2x+y=0$. Această ecuație are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta\geqslant 0$; $4-4y^2\geqslant 0$, adică $y\in[-1;1]$. În concluzie, $\mathrm{Im}(f)=[-1;1]$.

3. Notăm $3^x=y$. Obținem $3y=-y+8$, de unde $y=2$. Din $3^x=2$ obținem $x=\log_3 2$.

4. $f(1)+f(3)=7$ deci $f(1)=3$ și $f(3)=4$ (caz în care există 16 astfel de funcții) sau $f(3)=3$ și $f(1)=4$ (caz în care există 16 astfel de funcții). În total avem 32 de funcții.

5. Fie d dreapta ce trece prin $O(0,0)$ și este paralelă cu dreapta AB. Un vector director al dreptei d este $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$. Ecuația dreptei d este $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y}{2}$, adică $2x+3y=0$.

6. $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$. Ridicând la pătrat cele două egalități din ipoteză se obține $\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b=1$ și $\cos^2 a+\cos^2 b+2\cos a\cos b=\dfrac{1}{4}$.

Adunând aceste relații, se obține $2+2\cos(a-b)=\dfrac{5}{4}$, de unde $\cos(a-b)=-\dfrac{3}{8}$.

VARIANTA 42

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{3^3}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}y=x^2-3x+1\\ y=2x^2+x+4\end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt[4]{5}+1\right)^{100}$.

5p **5.** Să se arate că punctele $A(-1,5)$, $B(1,1)$ și $C(3,-3)$ sunt coliniare.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul care are lungimile laturilor 4, 5 și 7.

Soluții

1. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{3^3}=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{10}{9}=\dfrac{20}{27}$; $\left[\dfrac{20}{27}\right]=0$.

2. Scăzând cele două ecuații obținem $x^2+4x+3=0$ de unde $x=-1$ sau $x=-3$.

Sistemul are două soluții: $\begin{cases}x=-1\\ y=5\end{cases}$ și $\begin{cases}x=-3\\ y=19\end{cases}$.

3. Din $\mathrm{arctg}\,x=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{3}$ obținem $x=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{3}\right)=\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$.

4. $\left(\sqrt[4]{5}+1\right)^{100}=\sum_{k=0}^{100}T_{k+1}$, de unde $T_{k+1}=C_{100}^{k}\left(\sqrt[4]{5}\right)^{100-k}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant 100$.

Din $T_{k+1}\in\mathbb{Q}$ rezultă $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{100-k}\in\mathbb{Q}$, de unde k este multiplu de 4 mai mic sau egal decât 100. Cum între 0 și 100 sunt 26 de multiplii ai lui 4, tot atâția termeni raționali va avea și dezvoltarea.

5. Cum $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-4\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=4\vec{i}-8\vec{j}$, rezultă $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

Atunci A, B, C sunt coliniare.

6. $p=\dfrac{4+5+7}{2}=8$; $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1}=4\sqrt{6}$;

$r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{4\sqrt{6}}{8}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

VARIANTA 43

5p **1.** Să se determine valoarea de adevăr a afirmației: „Suma oricăror două numere iraționale este număr irațional."

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Să se rezolve ecuația $f(f(x))=f^2(x)$.

5p **3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x-2^x=12$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din produsul cartezian $A\times A$, produsul numerelor a și b să fie impar.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $C(-1,1)$. Să se calculeze aria pătratului de diagonală AC.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Soluții

1. Fie $a=\sqrt{2}$ și $b=-\sqrt{2}$. Avem $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $a+b=0\in\mathbb{Q}$. Afirmația este falsă.

2. Din $f(f(x))=f^2(x)$ rezultă $x+4=x^2+4x+4\Rightarrow x^2+3x=0$, deci $x\in\{-3,0\}$.

3. Notăm $2^x=y$, $y>0$. Atunci, din $y^2-y=12$ obținem $y_1=-3$ și $y_2=4$; dar $y>0$, rezultă $y=4$. Din $2^x=4$ obținem $x=2$.

4. Produsul cartezian $A\times A$ are 36 de elemente: $A\times A=\{(1,1),(1,2),.....,(6,6)\}$. Fie $(a,b)\in A\times A$. Produsul $a\cdot b$ este impar dacă și numai dacă a și b sunt impare. Cazurile favorabile sunt: $(1,1)$, $(1,3)$, $(1,5)$, $(3,1)$, $(3,3)$, $(3,5)$, $(5,1)$, $(5,3)$ și $(5,5)$. Probabilitatea cerută este $P=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}=0,25$.

5. $AC=\sqrt{(1+1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$; $A=\dfrac{AC^2}{2}=4$.

6. $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ=2\cdot\sin 75^\circ=2\sin(30^\circ+45^\circ)=$

$=2(\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

VARIANTA 44

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $z=\dfrac{1-i}{1+i}$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2+mx+1\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\arcsin 2x=-\dfrac{1}{2}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,3,\ldots,9\}$. Să se determine numărul submulțimilor mulțimii A care au 5 elemente dintre care exact două sunt numere pare.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $B(-1,2)$ și $C(2,-2)$. Să se determine distanța de la punctul O la dreapta BC.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ și că $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{ctg}\alpha$.

Soluții

1. $z=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}=-i$, de unde rezultă $\operatorname{Re}(z)=0$.

2. Dacă $x^2+mx+1\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, atunci $\begin{cases}\Delta\leq 0\\ a=1>0\end{cases}$. Din $\Delta\leq 0$ obținem $m^2-4\leq 0$ adică $m\in[-2;2]$.

3. Obținem $2x\in[-1,1]$ și $\sin\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2x$, de unde $x=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{2}$.

4. Mulțimea A conține 5 elemente pare și 5 impare. Dacă o submulțime cu 5 elemente a lui A conține două elemente pare, rezultă că celelalte trei elemente sunt impare. Putem alege 2 elemente pare dintre cele 5 în C_5^2 moduri, iar 3 elemente impare dintre cele 5 pot fi alese în C_5^3.

Numărul cerut în enunț este $C_5^2\cdot C_5^3=100$.

5. BC: $4x+3y-2=0$; $d(O,BC)=\dfrac{|4\cdot 0+3\cdot 0-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{2}{5}$.

6. Dacă $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, atunci $\cos\alpha<0$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{4}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, adică $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$.

VARIANTA 45

5p **1.** Să se determine partea întreagă a numărului $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}$.

5p **2.** Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2+x-1=0$. Să se demonstreze că $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\in\mathbb{Z}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 3^x+3^{1-x}=7$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $B=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict crescătoare $f:A\to B$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-3,-1)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A în triunghiul ABC.

5p **6.** Să arate că $2(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ)=\sqrt{2}$.

Soluții

1. $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}=\frac{7(5\sqrt{2}+1)}{49}=\frac{5\sqrt{2}+1}{7}$; $\left[\frac{5\sqrt{2}+1}{7}\right]=1$.

2. Din relațiile lui Viète obținem $x_1+x_2=-1$ și $x_1x_2=-1$.

Atunci $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=-3\in\mathbb{Z}$.

3. Ecuația este echivalentă cu $2\cdot 3^x+\frac{3}{3^x}=7$. Făcând substituția $y=3^x>0$ obținem ecuația $2y^2-7y+3=0$ cu soluțiile 3 și $\frac{1}{2}$. Avem $3^x=3$, de unde $x=1$, iar din $3^x=\frac{1}{2}$ obținem $x=-\log_3 2$.

4. f strict crescătoare dacă și numai dacă $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$. Orice submulțime a lui B poate fi ordonată crescător într-un singur mod. Numărul funcțiilor strict crescătoare $f:A\to B$ este egal cu numărul submulțimilor cu 4 elemente ale mulțimii B, adică $C_6^4=15$.

5. BC: $2x-y+5=0$; $d(A,BC)=\frac{|1\cdot 2+3\cdot(-1)+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

6. Cum $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}$; atunci

$2(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ)=4\sin 30^\circ\cos 45^\circ=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

VARIANTA 46

5p **1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3+a_{19}=10$, să se calculeze a_6+a_{16}.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația $x^2-mx+1-m=0$ are două rădăcini reale distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x+\lg x=6$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3\}$ și $B=\{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict descrescătoare $f:A\to B$, cu proprietatea că $f(3)=1$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2,-1)$, $N(-1,1)$ și $P(0,3)$. Să se determine coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Să se calculeze lungimea medianei duse din A în triunghiul ABC, știind că $AB=2$, $AC=3$ și $BC=4$.

Soluții

1. Fie r rația progresiei. Avem $a_6=a_3+3r$ și $a_{16}=a_{19}-3r$.

Cum $a_6+a_{16}=a_3+a_{19}$, rezultă $a_6+a_{16}=10$.

2. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației date.

Avem $\Delta=m^2+4m-4$. Obținem $x_{1,2}\in\mathbb{R}$; $x_1\neq x_2$ dacă $\Delta>0$, de unde $m\in(-\infty;-2-2\sqrt{2})\cup(-2+2\sqrt{2};\infty)$.

3. Se impune condiția $x>0$. Făcând substituția $\lg x=y$, ecuația devine $y^2+y-6=0$ de unde obținem $y_1=2$, $y_2=-3$.

Dacă $\lg x=2$ obținem $x=100$, iar dacă $\lg x=-3$ obținem $x=\frac{1}{1000}$.

4. Dacă f strict descrescătoare, atunci $f(1)>f(2)>f(3)=1$. Orice submulțime a lui B poate fi ordonată descrescător într-un singur mod. Numărul funcțiilor strict descrescătoare $f:A\to B$ este egal cu numărul funcțiilor $g:\{1,2\}\to\{2,3,4,5\}$ strict descrescătoare, adică $C_4^2=6$.

5. Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ}=(a-2)\vec{i}+(b+1)\vec{j}$ și $\overrightarrow{NP}=\vec{i}+2\vec{j}$. Dacă $MNPQ$ este paralelogram, atunci $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$ de unde $a-2=1$ și $b+1=2$. Punctul căutat este $Q(3,1)$.

6. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Avem $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, de unde $\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2$.

$AM^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2+2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\cos A\right)$.

Din teorema cosinusului avem $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$ de unde $2AB\cdot AC\cdot\cos A=AB^2+AC^2-BC^2$.

Atunci $AM^2=\frac{2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2}{4}$, adică $AM=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

VARIANTA 47

5p	**1.** Să se arate că numărul $(2+i)^4+(2-i)^4$ este întreg.
5p	**2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație $y=2x+1$ și parabola de ecuație $y=x^2+x+1$.
5p	**3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2x+\sqrt{16+x^2}=11$.
5p	**4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr natural de patru cifre, acesta să fie divizibil cu 9.
5p	**5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ și $C(3,2)$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se determine ecuația dreptei OG.
5p	**6.** Să se arate că $2\cdot(\cos 75^\circ+\cos 15^\circ)=\sqrt{6}$.

Soluții

1. $(2+i)^4+(2-i)^4=(3+4i)^2+(3-4i)^2=-7+24i-7-24i=-14\in\mathbb{Z}$.

2. Cum sistemul $\begin{cases}y=x^2+x+1\\y=2x+1\end{cases}$ are două soluții: $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ și $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$, atunci dreapta de ecuație $y=2x+1$ intersectează parabola de ecuație $y=x^2+x+1$ în punctele $A(0,1)$ și $B(1,3)$.

3. $\sqrt{16+x^2}=11-2x$; ridicând la pătrat obținem $16+x^2=121+4x^2-44x$, adică $3x^2-44x+105=0$ cu soluțiile $x_1=3$ și $x_2=\frac{35}{3}$. Dar $x\leqslant\frac{11}{2}$, deci este valabilă doar $x=3$.

4. Sunt 9000 de numere naturale de 4 cifre. Numărul celor divizibile cu 9 este dat de numărul k-urilor, $k\in\mathbb{N}$, cu $1000\leqslant 9k\leqslant 9999$, adică $111,(1)\leqslant k\leqslant 1111$, deci există 1000 astfel de numere. Probabilitatea cerută este $P=\frac{1}{9}$.

5. Centrul de greutate al triunghiului ABC este $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$, adică $G(1,2)$. Ecuația dreptei OG este $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}$, adică $y=2x$.

6. $2\cdot(\cos 75^\circ+\cos 15^\circ)=4\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}=4\cos 30^\circ\cos 45^\circ=$

$=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$.

VARIANTA 48

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $(\sqrt{3}+i)^6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ și $a<b<c$.

5p **5.** Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ și $2x+4y=11$.

5p **6.** În paralelogramul $ABCD$ se cunosc $AB=1$, $BC=2$ și $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Soluții

1. Fie z numărul din enunț. Avem $z=2^6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6=2^6\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$. Folosind formula lui Moivre, obținem: $z=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)=-2^6$, de unde $\mathrm{Re}(z)=-64$.

2. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $(f\circ f)(512)=\frac{1}{\sqrt[3]{f(512)}}=\sqrt[9]{512}$, de unde $(f\circ f)(512)=\sqrt[9]{2^9}=2$.

3. Utilizând formula $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, ecuația devine $2\sin^2 x-\sin x-1=0$.

Notăm $y=\sin x$ și obținem ecuația $2y^2-y-1=0$ cu soluțiile $-\frac{1}{2}$ și 1. Dacă $\sin x=1$, atunci $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Dacă $\sin x=-\frac{1}{2}$, atunci $x\in\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $C_6^3=20$.

5. Fie $d_1:x+2y=6$ și $d_2:2x+4y=11$. Se consideră punctul $A(0;3)\in d_1$. Panta dreptei d_2 este $m_{d_2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$. Atunci panta unei drepte perpendiculare pe d_2 este 2. Ecuația dreptei d ce trece prin A și este perpendiculară pe d_2 este $y=2x+3$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases}2x+4y=11\\2x-y=-3\end{cases}$, obținem $d\cap d_2=\left\{B\left(-\frac{1}{10};\frac{14}{5}\right)\right\}$.

Distanța dintre d_1 și d_2 este $AB=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

6. $\overrightarrow{AD}^2=\|\overrightarrow{AD}\|^2=4$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AD}\|\cdot\cos 60^\circ=1$;

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$, adică $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=5$.

VARIANTA 49

5p **1.** Să se arate că numărul $\log_9\sqrt{3}+\log_4\sqrt[3]{2}$ este rațional.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2mx+m-1$, $m\in\mathbb{R}^*$. Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x)\leqslant 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+2^{x+1}+2^{x-1}=56$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,\ldots,1000\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\left\{\sqrt[3]{n}\mid n\in A\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** Fie triunghiul ABC și $M\in(BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

5p **6.** Știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și că $\mathrm{tg}\,x=3$, să se calculeze $\sin 2x$.

Soluții

1. $\log_9\sqrt{3}+\log_4\sqrt[3]{2}=\frac{5}{12}$.

2. Punem condițiile $m<0$ și $\Delta\leqslant 0$; $4m^2-4(m-1)\cdot m\leqslant 0$, adică $4m^2-4m^2+4m\leqslant 0$ deci $m<0$. Din cele două condiții rezultă $m\in(-\infty,0)$.

3. Din $2^x\left(1+2+\frac{1}{2}\right)=56$ rezultă $2^x=\frac{2\cdot 56}{7}=16$, de unde $x=4$.

4. Dacă $n\in\mathbb{N}$, atunci $\sqrt[3]{n}\in\mathbb{Q}$ dacă și numai dacă n este cub perfect. În mulțimea A sunt 10 cuburi perfecte: $1^3,2^3,\ldots,10^3$. Probabilitatea cerută este $P=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}=0{,}01$.

5. Din $\overrightarrow{MC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}=-3\cdot\frac{\overrightarrow{CB}}{4}=-3\overrightarrow{MB}$, avem că $M\in(BC)$ și $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{3}$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{BM}{BC}\overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

6. $\sin 2x=\frac{2\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{3}{5}$.

VARIANTA 50

5p **1.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele $2^{a-1}, 2^{-a+2}+1, 2^{a+1}+1$ să fie în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei $y=x^2+(2a-1)x+a^2$, $a\in\mathbb{R}$, este situat pe dreapta de ecuație $4x+4y=1$.

5p **3.** Să se arate că, dacă z este soluție a ecuației $z^2+2z+4=0$, atunci $z^2-\frac{8}{z}=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{11,12,\ldots,50\}$, aceasta să fie divizibil cu 2 și cu 5.

5p **5.** Trapezul isoscel $ABCD$ are bazele $[AB]$ și $[CD]$ și lungimea înălțimii egală cu 4. Să se calculeze $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg}2\alpha$, știind că $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

Soluții

1. Din condiția ca numerele să fie în progresie aritmetică obținem $2(2^{-a+2}+1)=2^{a-1}+2^{a+1}+1$, adică $2^{-a+3}+2=2^{a-1}+2^{a+1}+1$. Notăm $2^a=y>0$ și avem $\frac{2^3}{y}+2=\frac{y}{2}+2y+1$ obținând astfel ecuația $5y^2-2y-16=0$ cu soluțiile $y_1=-\frac{8}{5}<0$ și $y_2=2$. Rezultă $a=1$.

2. Coordonatele vârfurilor sunt $x_V=-a+\frac{1}{2}$ și $y_V=a-\frac{1}{4}$ și obținem $4x_V+4y_V=1$.

3. $z^2-\frac{8}{z}=\frac{z^3-8}{z}=\frac{(z-2)(z^2+2z+4)}{z}=0$.

4. Din cele 40 de elemente ale mulțimii doar 4 sunt divizibile cu 2 și cu 5; deci probabilitatea este $P=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$.

5. $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right|=\left|2\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{OR}\right|=2PR=8$, unde O este intersecția diagonalelor, $P\in AB$, $R\in CD$ și $PR\perp AB$, cu $O\in PR$.

6. $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, deci $\cos^2\alpha=\frac{169-144}{169}=\frac{25}{169}$ de unde $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Așadar, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5}$ și $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{120}{119}$.

VARIANTA 51

5p **1.** Să se determine numărul elementelor mulțimii $(A\setminus B)\cap\mathbb{Z}$ știind că $A=(-3;4]$ și $B=(1;5]$.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a dreaptei $y=2x+1$ cu parabola $y=x^2-x+3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1$.

5p **4.** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale inecuația $2^{x!}\leqslant 2048$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,1)$ la dreapta $d:5x+12y-4=0$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b)$ știind că $\operatorname{ctg}a=2$ și $\operatorname{ctg}b=5$.

Soluții

1. $A\setminus B=(-3;1]$; $(A\setminus B)\cap\mathbb{Z}=\{-2;-1;0;1\}$. Atunci $\operatorname{card}((A\setminus B)\cap\mathbb{Z})=4$.

2. $2x+1=x^2-x+3$. Rezolvând ecuația $x^2-3x+2=0$ obținem $x\in\{1;2\}$, de unde $(x;y)\in\{(1;3),(2;5)\}$.

3. Din $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\2-x\geqslant 0\end{cases}$ obținem $x\in[1;2]$. Ridicând la pătrat relația, obținem $x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)}=1$, adică $\sqrt{(x-1)(2-x)}=0$, de unde $x\in\{1;2\}$.

4. Din $2^{x!}\leqslant 2048$ obținem $x!\leqslant 11$ deci $x\in\{0,1,2,3\}$.

5. $\operatorname{d}(A;d)=\frac{|5\cdot 1+12\cdot 1-4|}{\sqrt{5^2+12^2}}$, adică $\operatorname{d}(A;d)=1$.

6. $\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{7}{9}$.

VARIANTA 52

5p **1.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|4x-8|-2|4-2x|$ este constantă.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care parabola $y=x^2-2x+a-1$ și dreapta $y=2x+3$ au două puncte distincte comune.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x-1}+1=x$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor iraționali ai dezvoltării $\left(\sqrt{3}+1\right)^9$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(m+1)\vec{i}+8\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-1)\vec{i}-4\vec{j}$ să fie coliniari.

5p **6.** Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB=5$, $BC=7$ și $AC=8$. Să se calculeze $m(\sphericalangle A)$.

Soluții

1. Cum $|4x-8|=4|x-2|$ și $|4-2x|=2|x-2|$ rezultă că $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$, adică funcția f este constantă.

2. Parabola și dreapta au două puncte distincte comune, dacă ecuația $x^2-2x+a-1=2x+3$ are două soluții. Obținem $x^2-4x+a-4=0$.

Ecuația are două soluții dacă $\Delta>0$, adică $4^2-4(a-4)>0$, de unde $a<8$.

3. Dacă $\sqrt[3]{x-1}=x-1$, atunci $x-1=(x-1)^3$. Rezultă că $(x-1)(x^2-2x)=0$, de unde $x\in\{0;\ 1;\ 2\}$.

4. $\left(\sqrt{3}+1\right)^9=\left(1+\sqrt{3}\right)^9$; $T_{k+1}=C_9^k\cdot\left(\sqrt{3}\right)^k=C_9^k\cdot 3^{\frac{k}{2}}$. Rezultă că $T_{k+1}\notin\mathbb{Q}$ dacă $\frac{k}{2}\notin\mathbb{N}$, de unde $k\in\{1,3,5,7,9\}$, deci 5 termeni iraționali.

5. $\frac{m+1}{m-1}=\frac{8}{-4}$, de unde $m=\frac{1}{3}$.

6. Aplicând teorema cosinusului în ΔABC pentru unghiul A, obținem $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$, adică $\cos A=\frac{1}{2}$, de unde $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

VARIANTA 53

5p **1.** Să se calculeze $\left[\sqrt{2009}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

5p **2.** Să se determine imaginea intervalului $[2,3]$ prin funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un element al mulțimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Fie vectorii $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine $p,r\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}=p\vec{a}+r\vec{b}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5, 7 și 8.

Soluții

1. Cum $\left[\sqrt{2009}\right]=44$ și $\left\{-\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{3}$, atunci $\left[\sqrt{2009}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}=46$.

2. Abscisa vârfului parabolei ce reprezintă graficul funcției este $x_v=-\frac{b}{2a}=2$. Cum $f(3)=0$ și $f(2)=-1$. Atunci $f([2;\ 3])=[-1;\ 0]$.

3. Din cele două condiții $\begin{cases}x+8\geqslant 0\\ x\geqslant 0\end{cases}$ avem $x\in[0;\infty)$. Ridicând la pătrat în egalitatea $\sqrt{x+8}=2+\sqrt{x}$, obținem $x+8=4+4\sqrt{x}+x$ de unde $x=1$.

4. $D_{56}=\{1,2,4,7,8,14;28,56\}$. Multiplii lui 4 din D_{56} sunt: 4, 8, 28, 56. Atunci $P=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

5. Cum $6\vec{i}+2\vec{j}=p\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+r\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$, obținem $\begin{cases}p+r=6\\ p-r=2\end{cases}$, de unde $(p;r)=(4;2)$.

6. Fie a, b, c lungimile laturilor, p semiperimetrul, S aria și R raza cercului circumscris triunghiului.

$p=\frac{5+7+8}{2}=10$;

Aplicând formula lui Heron obținem $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=10\sqrt{3}$;

$R=\frac{abc}{4S}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

VARIANTA 54

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2x-1}{1-x}\geqslant\frac{3x+2}{1-2x}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2-x}+x=2$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y})^{49}$. Să se determine termenul care îi conține pe x și pe y la aceeași putere.

5p **5.** Fie $\overrightarrow{r_A}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=\vec{i}+3\vec{j}$ și $\overrightarrow{r_C}=3\vec{i}+2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC=3$ și $\cos A=\frac{1}{2}$.

Soluții

1. $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$. Cum $4,5<\sqrt{21}<4,6$, atunci $9<2\sqrt{21}<9,2$, de unde $19<(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<19,2$. Rezultă că $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\right]=19$.

2. Din condițiile $1-x\neq 0$ și $1-2x\neq 0$, avem $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$. Din $\frac{2x-1}{1-x}-\frac{3x+2}{1-2x}\geqslant 0$ obținem $\frac{x^2-3x+3}{(x-1)(2x-1)}\leqslant 0$, de unde $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

3. Din $\sqrt[3]{2-x}=2-x$ prin ridicare la cub obținem $2-x=(2-x)^3$. Rezultă că $(2-x)(x^2-4x+3)=0$, de unde $x\in\{1;2;3\}$.

4. Avem $T_{k+1}=C_{49}^k\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{49-k}\cdot y^{\frac{k}{2}}$ și cum x și y au același exponent, obținem $\frac{2(49-k)}{3}=\frac{k}{2}$, de unde $k=28$. Atunci $T_{29}=C_{49}^{28}x^{14}y^{14}$ este termenul căutat.

5. Din $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}$ se obține $\overrightarrow{r_G}=2\vec{i}+2\vec{j}$.

6. $\frac{BC}{\sin A}=2R$ și $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Obținem $R=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

VARIANTA 55

5p **1.** Să se calculeze $[-\sqrt{8}]-\{-2,8\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}x^2+y^2=13\\x+y=5\end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geqslant 2$ astfel încât $C_x^2+A_x^2=30$.

5p **5.** Fie punctele $O(0;0)$, $A(2;1)$ și $B(-2;1)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg}2x$, știind că $\operatorname{ctg}x=3$.

Soluții

1. Avem $[-\sqrt{8}]=-3$; $\{-2,8\}=0,2$. Atunci rezultatul calculului este $-3,2$.

2. $x+y=5$; $xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\frac{5^2-13}{2}=6$. Obținem $t^2-5t+6=0$, de unde $t=3$ sau $t=2$. Deci $(x,y)\in\{(2,3),(3,2)\}$.

3. Notând $2^x=t$ ecuația devine $t^2-10t+16=0$ având soluțiile $t\in\{2;8\}$. Atunci $x\in\{1;3\}$.

4. Avem $C_x^2=\frac{x(x-1)}{2}$ și $A_x^2=x(x-1)$ cu $x\geqslant 2$. Ecuația devine $\frac{x(x-1)}{2}+x(x-1)=30$, de unde $x=5$.

5. Avem $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j},\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}+\vec{j}$, de unde $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$. Atunci $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{2\cdot(-2)+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}}=-\frac{3}{5}$.

6. $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{3}{4}$.

VARIANTA 56

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $2\bar{z}+z=3+4i$.

5p **2.** Știind că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2+3x+1=0$, să se calculeze $x_1^3+x_2^3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $1+5^x-2\cdot 25^x=0$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(a^2+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a\neq 0$. Să se determine rangul termenului care-l conține pe a^4.

5p **5.** Să se calculeze $\vec{u}^2-\vec{v}^2$ știind că $\vec{u}-\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 și 12.

Soluții

1. Fie $z=x+yi$. Atunci ecuația devine $2(x-yi)+(x+yi)=3+4i$, de unde $y=-4$ și $x=1$. Deci $z=1-4i$.

2. Din relațiile lui Viéte avem $S=-3, P=1$. Atunci $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=(-3)(9-3)=-18$ (se poate calcula folosind formula) $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$.

3. Notăm $5^x=y$, $y>0$; obținem $1+y-2y^2=0$, de unde $y=1$.

Din $5^x=1$ rezultă $x=0$.

4. $T_{k+1}=C_9^k\left(a^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^k=C_9^k a^{2(9-k)}\cdot a^{-\frac{k}{3}}$. Rezultă $2(9-k)-\frac{k}{3}=4$, de unde $k=6$.

Termenul căutat este T_7.

5. $\vec{u}^2-\vec{v}^2=(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=(3\vec{i}+2\vec{j})\,(2\vec{i}+3\vec{j})=3\cdot 2+2\cdot 3=12$.

6. Aplicând teorema lui Pitagora, obținem $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=13$, de unde $R=\frac{BC}{2}=\frac{13}{2}$.

VARIANTA 57

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ este natural.

5p **2.** Să se arate că $(x^2+4x+5)(x^2+2x+2)\geq 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2^2 x+\log_2(4x)=4$.

5p **4.** Să se determine termenul care nu-l conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$.

5p **5.** Se consideră dreapta d: $4x-8y+1=0$ și punctul $A(2;1)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=2$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea medianei duse din A.

Soluții

1. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=2\in\mathbb{N}$.

2. Cum $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$; atunci $(x^2+4x+5)(x^2+2x+2)\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

3. $x>0, \log_2(4x)=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x$. Notăm $\log_2 x=t$, atunci ecuația devine $t^2+t-2=0$ având soluțiile $t\in\{1;-2\}$, de unde $x\in\left\{2;\frac{1}{4}\right\}$.

4. $T_{k+1}=C_{200}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{200-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{200}^k x^{\frac{200-k}{3}}\cdot 2^k\cdot x^{\frac{-k}{2}}$, $k\in\{0;1;2;\ldots;200\}$.

Dezvoltarea nu-l conține pe x dacă $\frac{200-k}{3}-\frac{k}{2}=0$, de unde $k=80$. Atunci termenul care nu-l conține pe x este $T_{81}=C_{200}^{80}\cdot 2^{80}$.

5. Panta dreptei d este $m_d=-\frac{4}{-8}=\frac{1}{2}$, care va fi egală și cu panta paralelei la ea.

Atunci $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$, adică $x-2y=0$.

6. Aplicând teorema cosinusului în ΔABC obținem $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+16-16\cdot\frac{1}{2}=12$. Din teorema medianei în ΔABC obținem $m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}=\frac{2(4+16)-12}{4}=\frac{28}{4}=7$. Atunci $m_a=\sqrt{7}$.

VARIANTA 58

5p **1.** Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{1+4i}{4+7i}$.

5p **2.** Să se determine axa de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-6x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1}+3^{1-x}=10$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{1,3,5,...,2009\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** Se consideră dreapta $d: 2x+y-1=0$ și punctul $A(3,2)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Fie triunghiul ABC care are $AB=AC=5$ și $BC=6$. Să se calculeze distanța de la centrul de greutate al triunghiului ABC la dreapta BC.

Soluții

1. $\frac{1+4i}{4+7i}=\frac{(1+4i)(4-7i)}{(4+7i)(4-7i)}=\frac{32+9i}{16+49}$, deci partea reală este $\frac{32}{65}$.

2. Axa de simetrie pentru parabola ce reprezintă graficul funcției, este dreapta paralelă cu axa Oy ce trece prin vârful parabolei. Cum $x_v=-\frac{b}{2a}=1$, atunci dreapta $x=1$, este axa de simetrie căutată.

3. Notăm $3^x=t, t>0$. Ecuația devine $3t+\frac{3}{t}=10$ și are soluțiile $t\in\left\{\frac{1}{3};3\right\}$, de unde $x\in\{-1;1\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este $2010:2=1005$. Numărul cazurilor favorabile este dat de numărul multiplilor impari ai lui 3 cuprinși între 1 și 2009, adică $3\cdot1;\ 3\cdot3;...;3\cdot669$. Atunci $P=\frac{335}{1005}=\frac{1}{3}$.

5. Fie $d'\perp d$ astfel încât $A\in d'$. Dacă $m_d=-2$, atunci $m_{d'}=\frac{1}{2}$. Ecuația dreptei d' va fi $d': y-2=\frac{1}{2}(x-3)$, adică $x-2y+1=0$.

6. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Atunci $GM=\frac{1}{3}AM$. Cum ΔABC este isoscel, atunci AM este și înălțime. Conform teoremei lui Pitagora $AM^2=AB^2-BM^2$, de unde $AM=4$. Deci $GM=\frac{4}{3}$.

VARIANTA 59

5p **1.** Să se arate că numărul $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{4}\right)+...+\lg\left(1-\frac{1}{100}\right)$ este întreg.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-3|+|4-x|=1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}=\frac{5}{2}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{2,4,6,...,2010\}$, acesta să fie divizibil cu 4, dar să nu fie divizibil cu 8.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $AB=4$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 x$ știind că $\operatorname{ctg} x=6$.

Soluții

1. $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{4}\right)+...+\lg\left(1-\frac{1}{100}\right)=\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{99}{100}\right)=$

$=\lg\frac{1}{100}=-2\in\mathbb{Z}$.

2.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$		0	$x-3$		$x-3$	
$4-x$	$+$			$+$	0	$-$	
$\lvert 4-x\rvert$	$4-x$			$4-x$	0	$x-4$	

Dacă $x\in(-\infty;3)$, ecuația devine $3-x+4-x=1$, cu $x=3\notin(-\infty,3)$.

Dacă $x\in[3;4]$ ecuația devine $x-3+4-x=1$, $0x=0$, adică $x\in[3;4]$.

Dacă $x\in(4;+\infty)$, ecuația devine $x-3+x-4=1$, cu $x=4\notin(4;+\infty)$. În concluzie $S=[3;4]$.

3. Condiții: $x>0$ și $\log_3 x\neq0\Rightarrow x>0, x\neq1$. Notând $\log_3 x=t$ ecuația devine $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$, având soluțiile $t\in\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$, de unde $x\in\{9;\sqrt{3}\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este $2010:2=1005$. Numerele divizibile cu 4 sunt $4\cdot1$; $4\cdot2$; $4\cdot3$; ...; $4\cdot502$, adică 502 numere. Numerele divizibile cu 8 sunt $8\cdot1$, $8\cdot2$, $8\cdot3$; ...; $8\cdot251$, adică 251 numere. Cele divizibile cu 8 sunt divizibile și cu 4. Atunci numărul cazurilor favorabile este $502-251=251$. Rezultă că $P=\frac{251}{1005}$.

5. $AB=\sqrt{(m-2)^2+(-2-m)^2}=4$. După ridicare la pătrat, ecuația devine $2m^2=8$, adică $m^2=4$, de unde $m\in\{-2;2\}$.

6. $\operatorname{ctg}x=6\Leftrightarrow\frac{\cos x}{\sin x}=6$. Obținem $\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=36$, de unde $\sin^2 x=\frac{1}{37}$.

VARIANTA 60

5p **1.** Să se arate că $2(1+3+3^2+...+3^8)<3^9$.

5p **2.** Fie x_1,x_2 rădăcinile ecuației $x^2+5x-7=0$. Să se arate că numărul $x_1^3+x_2^3$ este întreg.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5 x+\log_x 5=\frac{5}{2}$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 3$ astfel încât $C_{2x-3}^2=3$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(-3,-2)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Știind că $\vec{u}\vec{v}=5$, $|\vec{u}|=2$ și $|\vec{v}|=3$ să se calculeze $\cos\left(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})\right)$.

Soluții

1. Avem $1+3+3^2+...+3^8=\frac{3^9-1}{3-1}=\frac{3^9-1}{2}$. Atunci $2\cdot\frac{3^9-1}{2}=3^9-1<3^9$.

2. Din relațiile lui Viéte avem $S=x_1+x_2=-5$ și $P=x_1x_2=-7$. Atunci $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS=-125-105=-230\in\mathbb{Z}$.

3. Notăm $\log_5 x=t$, unde $x>0, x\neq 1$. Atunci $\log_x 5=\frac{1}{\log_5 x}=\frac{1}{t}$ și ecuația devine $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$ și are soluțiile $t\in\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$, de unde $x\in\{25;\sqrt{5}\}$.

4. Avem condițiile: $2x-3\in\mathbb{N}$ și $2x-3\geq 2$. Din $2x-3\geq 2$, obținem $x\in\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

$C_{2x-3}^2=3$, $\frac{(2x-3)!}{2!(2x-5)!}=3$, $(2x-3)(2x-4)=6$,

$2x^2-7x+3=0$, $(2x-1)(x-3)=0$. Deci $x=3$.

5. Piciorul mediatoarei $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ este mijlocul $[AB]$, panta dreptei AB este 1, a mediatoarei este -1 și ecuația mediatoarei este $d: x+y=0$.

6. Cum $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\left(\sphericalangle(\vec{u};\vec{v})\right)$, atunci $\cos\left(\sphericalangle(\vec{u};\vec{v})\right)=\frac{5}{6}$.

VARIANTA 61

5p **1.** Să se determine numărul real x, știind că numerele $x+1, 1-x$ și 4 sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție a parabolei $y=x^2+5x-6$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi]$ ecuația $2\sin x+1=0$.

5p **4.** Fie mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii M, aceasta să aibă 2 elemente.

5p **5.** Punctele A, B și G au vectorii de poziție $\overrightarrow{r_A}=4\vec{i}+7\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{r_G}=4\vec{i}+4\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziție al punctului C astfel încât punctul G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Dacă $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$ și măsura unghiului vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este $\frac{\pi}{3}$, să se calculeze $(2\vec{u}+\vec{v})(2\vec{v}-\vec{u})$.

Soluții

1. $x+1+4=2(1-x)$, de unde $x=-1$.

2. Dacă $x=0$, atunci $y=-6$. Dacă $y=0$, atunci $x\in\{-6,1\}$, deci $A(0,-6)$ este intersecția cu axa Oy și $B(-6,0)$, $C(1,0)$ sunt intersecțiile cu axa Ox.

3. Ecuația devine $\sin x=-\frac{1}{2}$, $x\in[0,2\pi]$. Rezultă $x\in\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. Numărul submulțimilor lui M este $2^6=64$, deci sunt 64 de cazuri posibile
Numărul submulțimilor cu 2 elemente este $C_6^2=15$, deci 15 cazuri favorabile.
Rezultă $P=\frac{15}{64}$.

5. Dacă $C(a,b)$, atunci $\overrightarrow{r_C}=a\vec{i}+b\vec{j}$. Din condiția $\vec{r}_G=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)$, rezultă că $4\vec{i}+4\vec{j}=\frac{1}{3}[(6+a)\vec{i}+(6+b)\vec{j}]$, deci $a=6$, $b=6$.

6. Avem $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{u})=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1=\vec{v}\cdot\vec{u}$, $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2=1$; $\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2=4$, de unde $(2\vec{u}+\vec{v})(2\vec{v}-\vec{u})=4\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}=4-2+8-1=9$.

VARIANTA 62

5p **1.** Să se determine $x>0$ știind că numerele x, 6 și $x-5$ sunt în progresie geometrică.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$. Să se calculeze $f(2\cdot(f(-1)))$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **4.** Să se arate că $(n!)^2$ divide $(2n)!$ pentru orice n natural.

5p **5.** Se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(6,5)$. Să se determine coordonatele punctelor M și N știind că acestea împart segmentul $[AB]$ în trei segmente congruente, iar ordinea punctelor este A,M,N,B.

5p **6.** Să se determine numerele naturale a pentru care numerele a, $a+1$ și $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

Soluții

1. Avem $x(x-5)=36$, de unde $x_1=9$, $x_2=-4$. Cum $x>0$, rezultă că $x=9$.

2. $f(2(f(-1)))=f(2\cdot(-2))=f(-4)=10$.

3. Obținem $2x+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ sau $2x+\frac{\pi}{2}=-x+\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Din prima relație rezultă $x=2k\pi-\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, iar din a doua relație obținem $x=\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. $\frac{(2n)!}{n!\,n!}=\frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}=C_{2n}^n\in\mathbb{N}$, deci $(n!)^2$ divide $(2n)!$.

5. Avem $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$, atunci $M\left(\frac{x_A-kx_B}{1-k},\frac{y_A-ky_B}{1-k}\right)$, $k=-\frac{1}{2}$ deci $x_M=4$, $y_M=3$ rezultă $M(4,3)$. Avem $\frac{AN}{NB}=2$, $k=-2$ rezultă $N(5,4)$.

6. Rezultă $\cos A<0$, unde A este unghiul care se opune la latura de lungime $a+2$, deci $\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}<0$.
Deoarece $a\in\mathbb{Z}$ și $a>0$, rezultă $a^2-2a-3<0$, $a\in(-1,3)$.
Deci $a\in\{1,2\}$; $a=1$ nu verifică inegalitățile în triunghi, atunci $a=2$.

VARIANTA 63

5p **1.** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termen general $a_n=\dfrac{4n}{n+3}$, este crescător.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a parabolelor $y=x^2+x+1$ şi $y=-x^2-2x+6$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5p **4.** Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $\left(2x^2-5y\right)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1: mx+3y+2=0$ şi $d_2: 2x+y-8=0$ să fie concurente.

5p **6.** Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că dacă $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, atunci $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

Soluții

1. Şirul a_n este crescător dacă $a_{n+1}\geqslant a_n$; $\dfrac{4n+4}{n+4}\geqslant\dfrac{4n}{n+3}$;

$4n^2+16n+12\geqslant 4n^2+16n$, adevărat.

2. $x^2+x+1=-x^2-2x+6$; $2x^2+3x-5=0$,

având soluțiile $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{5}{2}$, deci $A(1,3)$ şi $B\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{19}{4}\right)$.

3. Din $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ obținem:

- $x-\dfrac{\pi}{4}=3x+\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, de unde $x=k\pi-\dfrac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.
- $x-\dfrac{\pi}{4}=-3x-\dfrac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$,

de unde $x=\dfrac{2k+1}{4}\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n=2^5$, deci $n=5$.

$T_4=C_5^3(2x^2)^2(-5y)^3=-C_5^3 4x^4\cdot 125y^3=-5000x^4y^3$.

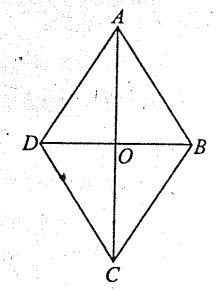
5. $d_1\cap d_2\neq\varnothing$ înseamnă $m\neq 6$.

6. Din $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, rezultă $AC\perp BD$,

$AB^2=OB^2+OA^2$, $CD^2=OD^2+OC^2$,

$AD^2=OD^2+OA^2$, $BC^2=OC^2+OB^2$ şi rezultă

$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.



VARIANTA 64

5p **1.** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x^2+2x+1$ şi $g(x)=x-2009$.
Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\geq 0$.

5p **3.** Să se rezolve în $(0,\pi)$ ecuaţia $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 3$, ştiind că $C_x^{x-1}+C_{x-1}^{x-3}\leq 9$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că dreptele $d_1: mx+(m+2)y-1=0$ şi $d_2: (m+2)x+4my-8=0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\operatorname{tg}A=2$, $\operatorname{tg}B=3$. Să se determine măsura unghiului C.

Soluţii

1. $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-(n+1)-n^2+n=2n>0$, deci (a_n) este strict crescător.

2. $f(x)=(x+1)^2$, $f(g(x))=[g(x)+1]^2\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

3. $\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}b$; $\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b=0$; $\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}=0$. Deci $\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=0$; rezultă $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$, $x\in(0,\pi)$; $2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$. Dacă $2x-\frac{\pi}{6}\in\{0,\pi\}$, atunci $x\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right\}$ care verifică şi faptul că numitorul fracţiei este nenul, deci $S=\left\{\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right\}$.

4. Inecuaţia devine $C_x^1+C_{x-1}^2\leq 9$, cu $x\geq 3$; $x^2-x-16\leq 0$ care se verifică pentru $x=3$ sau $x=4$.

5. Rezultă $\frac{m}{m+2}=\frac{m+2}{4m}$, rezultă $3m^2-4m-4=0$, de unde $m=2$ sau $m=-\frac{2}{3}$. Cum $\frac{m}{m+2}=\frac{m+2}{4m}\neq\frac{1}{8}$, rezultă $m\in\left\{-\frac{2}{3};2\right\}$.

6. Folosind formula $\operatorname{tg}(A+B+C)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}$, rezultă $0=2+3+\operatorname{tg}C-6\operatorname{tg}C$, atunci $\operatorname{tg}C=1$, de unde $\mathrm{m}(\widehat{C})=\frac{\pi}{4}$ (am folosit $A+B+C=\pi$, deci $\operatorname{tg}(A+B+C)=0$).

VARIANTA 65

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, \ldots$.

5p **2.** Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2\sin x$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifelor egală cu 2.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, ştiind că dreptele $d_1: mx+3y-2=0$ şi $d_2: 12x+2y+1=0$ sunt perpendiculare.

5p **6.** Ştiind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, să se calculeze $\sin\alpha$.

Soluţii

1. Raţia este: $17-13=4$; $a_2=a_3-4=13-4=9$; $a_1=a_2-4=9-4=5$.

2. $f(-x)=(-x)^3+2\sin(-x)=-(x^3+2\sin x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}$, deci funcţia este impară.

3. Împărţind prin cos$x$, ecuaţia devine $\operatorname{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x\in\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este 900. Numărul cazurilor favorabile se obţine din $a+b+c=2$, unde $a\in\{1,2,\ldots,9\}$, iar $b,c\in\{0,1,\ldots,9\}$, adică 3 cazuri (numerele: 110, 101, 200). Atunci $P=\frac{3}{900}=\frac{1}{300}$.

5. Dacă $d_1\perp d_2$, atunci $m_{d_1}\cdot m_{d_2}=-1$. Avem $-\frac{m}{3}\cdot\left(-\frac{12}{2}\right)=-1$, de unde $m=\frac{-1}{2}$.

6. $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

VARIANTA 66

5p **1.** Să se calculeze $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$.

5p **2.** Să se arate că $\frac{1}{3}$ este o perioadă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{3x\}$, unde $\{a\}$ este funcția parte fracționară a numărului a.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,2\pi]$ ecuația $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

5p **4.** Să se calculeze $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,n)$, $C(2,2)$ și $D(m,5)$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

5p **6.** Să se calculeze $\cos^2 x$, știind că $\operatorname{tg}x=4$.

Soluții

1. Cum $(2+i)(3-2i)=8-i$ și $(1-2i)(2-i)=-5i$, atunci
$(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)=8+4i$.

2. Avem $f(x)=3x-[3x]$; atunci

$$f\left(x+\frac{1}{3}\right)=3\left(x+\frac{1}{3}\right)-\left[3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]=3x+1-[3x+1]=3x+1-[3x]-1=f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Rezultă că $\frac{1}{3}$ este perioadă a funcției f.

3. $x=\pi$ verifică ecuația. Fie $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, atunci $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ și $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Rezultă că ecuația devine $2t\sqrt{3}=2$, de unde $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Deci $x\in\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$.

4. $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}=\frac{20!}{10!\cdot 10!}\cdot\frac{9!\cdot 11!}{20!}=\frac{11}{10}$.

5. Cele două diagonale AC și BD, având același mijloc, rezultă $m+4=2+2$ și $n+5=3+2$, de unde $(m,n)=(0;0)$.

6. $\frac{\sin x}{\cos x}=4\Rightarrow\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=16$; obținem $\cos^2 x=\frac{1}{17}$.

VARIANTA 67

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-m^2)x+3$, să fie strict crescătoare.

5p **3.** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea M a tuturor funcțiilor definite pe $A=\{1,2,3\}$ cu valori în $B=\{5,6,7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea M, aceasta să fie injectivă.

5p **5.** Se consideră punctul G, centrul de greutate a triunghiului ABC. Prin punctul G se duce paralela la AB care intersectează dreapta BC în punctul P. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GP}=m\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 2\alpha$, dacă se cunoaște $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Soluții

1. Avem $b_3^{\,2}=6\cdot 24$., adică $b_3=12$; $q=\frac{b_3}{b_2}=2$ rezultă că $b_1=\frac{b_2}{q}=3$

2. Funcția f este strict crescătoare dacă $3-m^2>0$, adică $m\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

3. $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{3\pi}{3}=0$, $\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; Atunci

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Numărul cazurilor posibile este 3^3. Numărul cazurilor favorabile este $3!=6$. Atunci

$$P=\frac{6}{3^3}=\frac{2}{9}.$$

5. $\frac{GP}{AB}=\frac{1}{3}$; $\overrightarrow{GP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $m=\frac{1}{3}$.

6. $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{-7}{9}$.

VARIANTA 68

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}$ este întreg.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m^2-2)x-3$ să fie strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Soluții

1. $\frac{25(4-3i)}{25}+\frac{25(4+3i)}{25}=\frac{200}{25}=8\in\mathbb{Z}$.

2. f strict descrescătoare dacă $m^2-2<0$, adică pentru $m\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

3. Dacă $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$, atunci $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}=\frac{\pi}{6}$, de unde $x=\sqrt{3}$.

4. Numărul cazurilor posibile este $90:2=45$. Numărul cazurilor favorabile se obține din $4\cdot3,4\cdot4,...,4\cdot24$, adică 22. Atunci $P=\frac{22}{45}$.

5. Din construcția figurii se obține $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=3$, și din reciproca teoremei lui Thales deducem că $MN\parallel BC$, adică vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

6. $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

VARIANTA 69

5p **1.** Să se determine $z\in\mathbb{C}$ știind că $\frac{\bar{z}+7i}{z}=6$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=3x+1$. Să se demonstreze că funcția f este neinversabilă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră din mulțimea $\{0,1,...,9\}$, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)!-x!\le100$.

5p **5.** Să se arate că dreptele de ecuații $d_1:\ 2x-y+1=0$ și $d_2:\ 2x+y-1=0$ sunt simetrice față de axa Oy.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Soluții

1. Avem $\bar{z}+7i=6z$. Fie $z=x+yi$ cu $x,y\in\mathbb{R}$; $\bar{z}=x-yi$. Rezultă $x-yi+7i=6(x+yi)$, de unde $x=0,y=1$, adică $z=i$.

2. $f(1)+f(2)+...+f(50)=2(1+2+...+50)+50=2\cdot\frac{50\cdot51}{2}+50=50\cdot52=2600$.

3. Dacă f ar fi surjectivă, atunci ar exista $x_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x_0)=0$, adică $3x_0+1=0$, de unde $x_0=-\frac{1}{3}\notin\mathbb{N}$. Deci f nu e surjectivă, adică f nu este bijectivă, de unde rezultă că f nu este inversabilă.

4. Avem $x!(x+1-1)\le100$, adică $x!\cdot x\le100$. Inegalitatea este verificată pentru $x\in\{0;1;2;3;4\}$, iar pentru $x>4$ avem $x!\cdot x>100$; atunci $P=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

5. $d_1\cap d_2=\{A(0,1)\}\in Oy$; $M(-1,-1)\in d_1$ și $N(1,-1)\in d_2$ sunt simetrice față de Oy, rezultă că dreptele d_1 și d_2 sunt simetrice față de Oy.

6. $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

VARIANTA 70

5p **1.** Să se calculeze $(1+i)^{20}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. Să se calculeze suma $S=f(f(-10))+f(f(-9))+...+f(f(-1))+f(f(1))+...+f(f(9))+f(f(10))$

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(3^x+1)$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3-6C_5^3$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că distanța de la punctul $A(m, m+1)$ la dreapta $d: 3x-4y-1=0$ este 1.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ$.

Soluții

1. $(1+i)^{20}=(2i)^{10}=2^{10}\cdot i^{10}=-2^{10}=-1024$.

2. Cum $f(f(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=x$, atunci $S=(-10)+(-9)+...+(-1)+1+...+10=0$.

3. $f(x)=\log_2 x$ este strict crescătoare, $g(x)=3^x+1$ este strict crescătoare, deci și $f\circ g$ este strict crescătoare, adică injectivă.

4. $A_5^3-6C_5^3=\frac{5!}{2!}-6\frac{5!}{3!\cdot 2!}=3\cdot 4\cdot 5-6\cdot\frac{4\cdot 5}{2}=0$.

5. $\frac{|3m-4(m+1)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$; $|3m-4m-4-1|=5$; $|-m-5|=5$; $|m+5|=5$. Obținem $m\in\{-10;0\}$.

6. $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-2\sin 45^\circ\sin 30^\circ$. Cum $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, rezultă $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

VARIANTA 71

5p **1.** Să se calculeze $\log_7 2009-\log_7 287-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$. Să se arate că funcția f este pară.

5p **3.** Să se arate că valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x^4$ este $f(0)$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ astfel încât $3C_n^1+2C_n^2=8$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele A',B',C' astfel încât $\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A}=3\overrightarrow{BC'}$. Să se arate că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.

5p **6.** Să se determine ecuația medianei corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC, știind că $A(2,2)$ și ecuațiile medianelor duse din B și C sunt $2x+y-2=0$, respectiv $x-y+2=0$.

Soluții

1. $\log_7 2009-\log_7 287-1=\log_7\frac{2009}{287}-1=\log_7 7-1=0$.

2. $f(-x)=(-x)^2-\frac{1}{(-x)^2}=x^2-\frac{1}{x^2}=f(x)$. Cum $f(-x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}^*$, rezultă că funcția f este pară.

3. $x\in\mathbb{R}$, $x^4\geq 0$; $-x^4\leq 0$; $3-x^4\leq 3=f(0)$.

4. Avem $3n+2\frac{n(n-1)}{2}=8$, $n\geq 2$. Rezultă $n=2$ sau $n=-4$. Convine numai $n=2$.

5. Cum $\frac{A'C}{A'B}=2$, $\frac{C'B}{C'A}=\frac{1}{3}$, $\frac{B'A}{B'C}=\frac{3}{2}$ și $\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{B'A}{B'C}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$, atunci AA', BB' și CC' sunt concurente.

6. Medianele sunt concurente; din $2x+y-2=0$ și $x-y+2=0$ obținem $x=0$ și $y=2$. Mediana corespunzătoare laturii (BC) trece prin punctele $A(2,2)$ și $(0,2)$, deci ecuația este $y=2$.

VARIANTA 72

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$. Să se arate că funcția f este impară.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x$.

5p **4.** Să se calculeze $C_{2009}^0\cdot 5^{2009}-C_{2009}^1\cdot 5^{2008}\cdot 4+C_{2009}^2\cdot 5^{2007}\cdot 4^2-\ldots+C_{2009}^{2009}\cdot 4^{2009}$.

5p **5.** Se consideră punctul $A(1,2)$ și dreapta de ecuație $d:\ 4x-2y+5=0$. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul A pe dreapta d.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ$.

Soluții

1. $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}=\cos\frac{100\pi}{4}+i\sin\frac{100\pi}{4}=\cos 25\pi+i\sin 25\pi=-1$.

2. $f(-x)=(-x)^3-\frac{1}{-x}=-x^3+\frac{1}{x}=-\left(x^3-\frac{1}{x}\right)$; cum $f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}^*$, atunci f impară.

3. $f(1)=0$; $f(4)=12$. Vârful parabolei corespunde lui $x=\frac{1}{2}$ în afara intervalului $[1,4]$, deci f este crescătoare pe $[1,4]$ și $f([1,4])=[0,12]$.

4. $(5-4)^{2009}=1^{2009}=1$.

5. $m_d=-\frac{4}{-2}=2$, atunci $m=-\frac{1}{2}$. Rezultă $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$; $x+2y-5=0$.

6. Avem $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{\sin 90^\circ+\sin 60^\circ}{2}$. Cum $\sin 90^\circ=1$ și $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

VARIANTA 73

5p **1.** Să se calculeze $|5-12i|-|12+5i|$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x^4$. Să se calculeze $(f\circ f\circ f\circ f)(1)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+4^x=20$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{0,5,10,\ldots,2010\}$, acesta să fie divizibil cu 25.

5p **5.** Se consideră un triunghi ABC, cu lungimile laturilor $AB=c, AC=b$ și un punct D astfel încât $\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$. Să se arate că semidreapta $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos\alpha$.

Soluții

1. $|5-12i|-|12+5i|=\sqrt{25+144}-\sqrt{144+25}=0$.

2. $(f\circ f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(f(1))))=f(f(f(0)))=f(f(0))=f(0)=0$.

3. Notăm $2^x=t,\ t>0$. Din $t^2+t-20=0$ obținem $t=4$. Din $2^x=4$ rezultă $x=2$.

4. Numărul cazurilor posibile este dat de numărul elementelor mulțimii A, care se mai pot scrie: $5\cdot 0$; $5\cdot 1$; $5\cdot 2$; ...; $5\cdot 402$ și care sunt în număr de $402+1=403$.
Numărul cazurilor favorabile este dat de numărul multiplilor lui 25 din mulțimea A, adică $25\cdot 0$; $25\cdot 1$; $25\cdot 2$; ...; $25\cdot 80$ și care sunt în număr de $80+1=81$.
Atunci probabilitatea cerută este $P=\frac{81}{403}$.

5. Fie $D'\in(BC)$ astfel încât AD' bisectoare $\overset{\text{T. bisect.}}{\Rightarrow}\frac{AB}{AC}=\frac{BD'}{D'C}\to\frac{BD'}{D'C}=\frac{c}{b}\overset{\text{not}}{=}r$. Atunci

$\overrightarrow{AD'}=\frac{1}{1+r}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{r}{1+r}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD'}=\frac{1}{1+\frac{c}{b}}\overrightarrow{AB}+\frac{\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{AD'}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\ |\cdot(b+c)$. Obținem $(b+c)\overrightarrow{AD'}=b\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}$. Dar $b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$. Rezultă $(b+c)\cdot\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AD},(b+c>0)$, adică $\overrightarrow{AD}$ coliniar cu $\overrightarrow{AD'}$. Cum A comun, rezultă A, D, D' coliniare, [AD' fiind bisectoare, atunci $[AD$ este bisectoare.

6. Cum $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ atunci $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$, de unde $|\cos\alpha|=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, atunci $\cos\alpha<0$. Rezultă $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

VARIANTA 74

5p **1.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^2+3z+4=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să nu intersecteze axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{x-2}=0$.

5p **4.** Să se arate că $C_{a+b}^{a}=C_{a+b}^{b},\forall a,b\in\mathbb{N}^*$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3,3)$, $B(2,4)$ și $C(2m,1-m)$ să fie coliniare.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

Soluții

1. $\Delta=9-16=-7=7i^2$; $z_{1,2}=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$.

2. Pentru $x=0$, $x-2m+2=-2m+2$. Cum $a=1>0$, atunci funcția f este crescătoare. $G_f\cap Ox=\varnothing$, dacă $f(x)>0$ pentru $x>0$; atunci $-2m+2\geq 0$, de unde $m\leq 1$. Deci $m\in(-\infty,1]$.

3. Dacă $\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{x-2}=0$, atunci $\sqrt{2-x}=\sqrt[3]{x-2}$.
Condiții: $2-x\geq 0$. Rezultă $x\leq 2$. Avem $\sqrt{2-x}\geq 0$. Din $\sqrt{2-x}=\sqrt[3]{x-2}$ și $\sqrt{2-x}\geq 0$, rezultă $\sqrt[3]{x-2}\geq 0$, $x-2\geq 0$, $x\geq 2$. Din $x\leq 2$ și $x\geq 2$, obținem $x=2$.

4. $C_{a+b}^{a}=C_{a+b}^{a+b-a}=C_{a+b}^{b}$.

5. A, B, C coliniare, rezultă $\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 2m & 1-m & 1\end{vmatrix}=0$, de unde $5-m=0$, adică $m=5$.

6. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, de unde $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$.
Rezultă că $|\sin\alpha|=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cum $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, atunci $\sin\alpha>0$, de unde $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

VARIANTA 75

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $a=-\sqrt[3]{27}$, $b=\log_2\frac{1}{16}$ și $c=-2$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ se află situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)=1$.

5p **4.** Se consideră dreptele paralele d_1, d_2 și punctele distincte $A,B,C\in d_1$, $M,N,P,Q\in d_2$. Să se determine numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea celor șapte puncte date.

5p **5.** Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(-3;2)$ față de mijlocul segmentului $[BC]$, unde $B(1;-4)$ și $C(-5,-1)$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AM=BC=4$, unde M este mijlocul lui (BC), iar $m(\sphericalangle AMC)=150^\circ$.

Soluții

1. Avem $a=-3$, $b=-4$ și $c=-2$, deci $b<a<c$.

2. $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$ rezultă $m^2+8m<0$, deci $m\in(-8,0)$.

3. Din condiții se obține $x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty)$; $\sqrt{x^2+x-2}=2$; $x^2+x-6=0$, deci $x\in\{-3,2\}$, ambele verificând și condiția de existență.

4. $4C_3^2+3C_4^2=30$, deci vom avea 30 de triunghiuri.

5. D este simetricul lui A față de mijlocul lui (BC), deci $ABDC$ paralelogram, de unde $x_A+x_D=x_B+x_C$ și $y_A+y_D=y_B+y_C$. Vom avea $D(-1,-7)$.

6. $A_{ABC}=2A_{AMC}=MC\cdot AM\cdot\sin 150^\circ=\frac{1}{2}BC\cdot AM\cdot\sin 150^\circ=4$.

VARIANTA 76

5p **1.** Să se verifice dacă numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-3x+1=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se arate că $x_1^2+x_2^2\in\mathbb{N}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se arate că oricare ar fi n natural, $n\geq 1$, are loc egalitatea $C_{2n}^n=2\cdot C_{2n-1}^n$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u}+\vec{v}$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Soluții

1. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}}=\sqrt{2}-1=-1+1\cdot\sqrt{2}\in\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Z}\}$

2. Conform relațiilor lui Viéte, $x_1+x_2=3$ și $x_1x_2=1$.

Atunci $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=9-2=7\in\mathbb{N}$.

3. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, rezultă $\operatorname{arctg}x=\overset{3)}{\frac{\pi}{2}}-\overset{2)}{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$, $x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $C_{2n}^n=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ (1)

$2C_{2n-1}^n=2\cdot\frac{(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!}=2\cdot\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}=2\cdot\frac{(2n-1)!\cdot n}{n!(n-1)!\cdot n}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ (2)

Din (1) și (2) rezultă $C_{2n}^n=2\cdot C_{2n-1}^n$

5. $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}+3\vec{j}$, atunci $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

6. Avem $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\frac{9}{25}+\cos^2\alpha=1$; $\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$. Rezultă $|\cos\alpha|=\frac{4}{5}$.

Dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, atunci $\cos\alpha<0$, de unde $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. Atunci $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{9}{3}=3$.

VARIANTA 77

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de rație 2 cu $a_3+a_4=8$. Să se determine a_1.

5p **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x$. Să se calculeze $f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots+f(-10)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-2^x=56$.

5p **4.** Să se calculeze $A_4^3-A_3^2-C_4^2$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Se consideră punctul M definit prin $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$. Să se arate că dreptele GM și AC sunt paralele.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin\alpha=\frac{3}{4}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

Soluții

1. Avem $\begin{cases}r=2\\a_3+a_4=8\end{cases}$. Rezultă $\begin{cases}r=2\\2a_1+5r=8\end{cases}$, de unde $\begin{cases}r=2\\a_1=-1\end{cases}$.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=1+x$

$f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots+f(-10)=1-1+1-2+1-3+\ldots+1-10=10-(1+2+\ldots+10)=10-55=-45$.

3. Cum $4^x=2^{2x}$, ecuația se mai scrie $\left.\begin{matrix}2^{2x}-2^x-56=0\\ \overset{not}{2^x=a>0}\end{matrix}\right|$. Ecuația devine

$a^2-a-56=0$, $\sqrt{\Delta}=15$, $a_{1,2}=\frac{1\pm 15}{2}\begin{cases}a_1=8\\a_2=-7\ \text{nu convine}\end{cases}$. Atunci $2^x=2^3$, de unde $x=3$.

4. $A_4^3-A_3^2-C_4^2=4!-3!-\frac{4!}{2!2!}=24-6-6=12$.

5. Dacă $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$, atunci $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{CM}$; G centru de greutate, rezultă $\frac{GB'}{GB}=\frac{1}{2}$;

$\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{CM}$, rezultă $\frac{CM}{MB}=\frac{1}{2}$. Atunci $GM\parallel AC$.

6. Dacă $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, cum $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ rezultă $\cos^2\alpha=\frac{7}{16}$. Cum $\cos\alpha>0$, atunci $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, de unde $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

VARIANTA 78

5p **1.** Să se calculeze $10^{\lg 7} - \sqrt[3]{343}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $2x^2 - 3x + 1 \le 0$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \log_3 2^x - x$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram și P un punct astfel ca $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}$. Să se arate că $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$.

5p **6.** Fie $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că $\operatorname{tg}a \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b = 1$.

Soluții

1. $10^{\lg 7} - \sqrt[3]{343} = 7 - 7 = 0$

2. $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Cum $\Delta = 1$, rezultă $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$	$+$	0	$-$	0 $+$

$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

3. $f(x) = x\log_3 2 - x = x(\log_3 2 - 1)$.
Cum $\log_3 2 - 1 < 0$, atunci funcția este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, de unde f injectivă.

4. Fie n, numărul diagonalelor și x numărul vârfurilor. Atunci $n = \frac{x(x-3)}{2} = 20$.

5. Dacă $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}$, atunci $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

Dar $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, rezultă $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

6. $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Dacă $a + b = \frac{\pi}{4}$, atunci $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b} = 1$; $1 = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}$;

$1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b = \operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b$, adică $\operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b = 1$.

VARIANTA 79

5p **1.** Să se arate că $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap (\log_2 3, \infty) = \varnothing$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se determine abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$.

5p **4.** Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, astfel încât C_n^3 să dividă C_{n+1}^3.

5p **5.** Fie punctele $A(1,2)$, $B(-1,3)$ și $C(0,4)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A al triunghiului ABC.

5p **6.** Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{tg}^2 x = 6$. Să se calculeze $\cos^2 x$.

Soluții

1. $2\log_2 3 = \log_2 3^2 > \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$. Rezultă $2\log_2 3 > 3$, adică $\log_2 3 > \frac{3}{2}$.
Atunci $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap (\log_2 3, \infty) = \varnothing$.

2. $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Din $f(x) = 0$ obținem $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

3. $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$. Din condițiile de existență: $\begin{cases} x \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \end{cases}$ obținem $x \in [0, 1]$.
Avem $\sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{x} \ge 0$, iar prin ridicare la pătrat obținem $1 - x = 1 - 2\sqrt{x} + x$;
$\sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = 0$, de unde $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

4. $\frac{C_{n+1}^3}{C_n^3} = \frac{(n+1)!}{3!\,(n-2)!} \cdot \frac{3!\,(n-3)!}{n!} = \frac{n+1}{n-2}$. Condițiile: $\frac{n+1}{n-2} \in \mathbb{N}$ și $n \ge 3$ duc la soluțiile $n_1 = 5$ și $n_2 = 3$.

5. Ecuația dreptei BC: $x - y + 4 = 0$, atunci $d(A, BC) = \frac{|1 - 2 + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

6. $\operatorname{tg}^2 x = 6$; $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 6$; $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{7}{1}$; $\frac{1}{\cos^2 x} = 7$, de unde $\cos^2 x = \frac{1}{7}$.

VARIANTA 80

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\ldots(1-i^{2009})$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$. Să se arate că funcția $f\circ g$ este descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt[3]{2-x^2}\geq 1$.

5p **4.** Să se calculeze numărul funcțiilor injective $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1)\neq 1$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $P(4,-1)$ și este paralelă cu dreapta $x-2y+1=0$.

5p **6.** Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sin x=\frac{1}{2}+\cos x$. Să se calculeze $\sin 2x$.

Soluții

1. $(1-i)(1-i^2)\ldots(1-i^{2009})\overset{not}{=}p$. Cum $i^4=1$, atunci $1-i^4=0$, de unde $p=0$.

2. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=1-(2x-1)=-2x+2$. Cum $a=-2<0$, atunci $f\circ g$ este descrescătoare.

3. $\sqrt[3]{2-x^2}\geqslant 1$; $2-x^2\geqslant 1$; $x^2\leqslant 1$, de unde $x\in[-1;1]$.

4. Numărul funcțiilor injective $g:\{1;2;3\}\to\{1;2;3;4;5\}$ este A_5^3; numărul funcțiilor injective $h:\{2;3\}\to\{2;3;4;5\}$ este A_4^2. Numărul cerut va fi egal cu $A_5^3-A_4^2=48$.

5. $d_1:x-2y+a=0$; $P(4,-1)\in d_1$, rezultă $a=-6$, deci $d_1:x-2y-6=0$.

6. Avem $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$, atunci $(\sin x-\cos x)^2=\frac{1}{4}$;

$\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{4}$; $-\sin 2x=-\frac{3}{4}$. Deci $\sin 2x=\frac{3}{4}$.

VARIANTA 81

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 500$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-2x+m=0$, $m\in\mathbb{R}$, care are rădăcinile reale x_1 și x_2. Știind că $|x_1-x_2|=1$, să se determine m.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-x}=1+x$.

5p **4.** Să se calculeze $C_{16}^0+C_{16}^2+C_{16}^4+\ldots+C_{16}^{16}$.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că dreptele de ecuații $x+y=1$ și $3x-ay=2$ sunt paralele.

5p **6.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b=\frac{\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a+\sin 2b=2\cos(a-b)$.

Soluții

1. Avem $256<500<512$, deci $8=\log_2 256<\log_2 500<\log_2 512=9$, de unde partea întreagă este 8.

2. Dacă $|x_1-x_2|=1$, atunci $x_1-x_2\in\{-1;1\}$, de unde $(x_1-x_2)^2=1$.

Avem $1=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$, adică $1=4-4m$, de unde $m=\frac{3}{4}$.

3. Prin ridicare la cub obținem $1-x=(1+x)^3$, adică $1-x=1+3x^2+3x+x^3$, de unde $x^3+3x^2+4x=0$. Obținem $x(x^2+3x+4)=0$, de unde $x=0$ sau $x^2+3x+4=0$. Cum $\Delta=-7<0$, rezultă $x^2+3x+4\neq 0$, deci soluția ecuației este $x=0$.

4. Dezvoltând cu binomul lui Newton $(1+1)^{16}$ și $(1-1)^{16}$, apoi adunând cele două relații, obținem $C_{16}^0+C_{16}^2+C_{16}^4+\ldots+C_{16}^{16}=\frac{(1+1)^{16}+(1-1)^{16}}{2}=\frac{2^{16}}{2}=2^{15}$.

5. Cele două drepte sunt paralele dacă $\frac{1}{3}=\frac{1}{-a}\neq\frac{1}{2}$. Prin urmare $a=-3$.

6. $\sin 2a+\sin 2b=2\sin\frac{2a+2b}{2}\cos\frac{2a-2b}{2}=2\sin(a+b)\cos(a-b)=$

$=2\sin\frac{\pi}{2}\cos(a-b)=2\cos(a-b)$.

VARIANTA 82

5p **1.** Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+9$ se află pe dreapta de ecuație $x+y=7$.

5p **3.** Fie $f:\{1,2,3\}\to\{4,5,6\}$ o funcție injectivă. Să se arate că $f(1)+f(2)+f(3)=15$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibe ambele cifre impare.

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,0), B(2,3)$ și $C(-1,4)$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin a=\frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin 3a$.

Soluții

1. $(1+i)^4=(2i)^2=-4$, deci $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$.

2. $x_V=\frac{4}{2}=2$, $y_V=\frac{20}{4}=5$, $x_V+y_V=7$.

3. Valorile $f(1), f(2), f(3)$ sunt distincte, deci sunt 4,5,6 eventual permutate. Atunci suma lor este $4+5+6=15$.

4. M are 90 de elemente, cifre impare sunt 5, iar numere cu cifre impare 25. Probabilitatea este $P=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$.

5. $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+12=10$.

6. Folosim formula $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$. Rezultă $\sin 3a=\frac{11}{16}$.

VARIANTA 83

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparține intervalului $\left(\sqrt{2}, \log_2 5\right)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m știind că $x^2+3x+m\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$.

5p **4.** Într-o urnă sunt 49 de bile inscripționate cu numerele de la 1 la 49. Să se calculeze probabilitatea ca, extrăgând o bilă din urnă, aceasta să aibă scris pe ea un pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=m\vec{i}+4\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ=1$.

Soluții

1. Cum $8=(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6=9$, atunci $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$. Cum $3=(\sqrt[3]{3})^3<2^3=8$, atunci $\sqrt[3]{3}<2=\log_2 4<\log_2 5$. Adică $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\log_2 5$.

2. Discriminantul ecuației trebuie să fie negativ sau 0. $\Delta=9-4m$. Dacă $9-4m\leq 0$, atunci $m\geq\frac{9}{4}$, $m\in\left[\frac{9}{4};+\infty\right)$.

3. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ deci obținem $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}$, adică $x\in\{2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. Între 1 și 49 sunt 7 pătrate perfecte. $P=\frac{7}{49}=\frac{1}{7}$.

5. Condiția revine la $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$; $2m-12=0$, de unde $m=6$.

6. Folosim formula $\operatorname{tg}(90^\circ-k)=\operatorname{ctg}k=\frac{1}{\operatorname{tg}k}, k=1^\circ,2^\circ,3^\circ,\ldots,44^\circ$. Rezultă că produsul este $P=\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}44^\circ\cdot\operatorname{tg}45^\circ\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}44^\circ}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}2^\circ}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}1^\circ}=1$.

VARIANTA 84

5p **1.** Fie $z\in\mathbb{C}$. Să se arate că dacă $2z+3\bar{z}\in\mathbb{R}$, atunci $z\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $(0,4),(1,-2)$ și $(-1,1)$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:(0,\infty)\to(1,3)$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$ este bijectivă.

5p **4.** Să se determine numerele naturale n, $n\geqslant 5$, astfel încât $C_n^3=C_n^5$.

5p **5.** Se consideră punctele A,B,C,D astfel încât $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Să se arate că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

5p **6.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a-b=\pi$. Să se arate că are loc relația $\cos a\cdot\cos b\leqslant 0$.

Soluții

1. Avem $3(z+\bar{z})\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{C}$, deci $z=3z+3\bar{z}-(2z+3\bar{z})\in\mathbb{R}$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Avem $4=f(0)=c$, $-2=f(1)=a+b+c$ și $1=f(-1)=a-b+c$. Obținem $a=-\dfrac{9}{2}$ și $b=-\dfrac{3}{2}$, de unde $f(x)=-\dfrac{9}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+4$.

3. Din $f(x)=y, y\in(1,3)$ obținem $\dfrac{x+3}{x+1}=y$. Rezultă $x=\dfrac{3-y}{y-1}\in(0,\infty)$. Cum ecuația $f(x)=y$ are soluție unică, rezultă că funcția f este bijectivă.

4. $C_n^3=C_n^5\Rightarrow\dfrac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}=\dfrac{n!}{(n-5)!\cdot 5!}$. Obținem

$\dfrac{(n-2)(n-1)n}{6}=\dfrac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{120}$, de unde $(n-4)(n-3)=20$ și atunci $n=8$.

5. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

6. $\cos a=\cos(b+\pi)=-\cos b$, deci $\cos a\cdot\cos b=-\cos^2 a\leqslant 0$.

VARIANTA 85

5p **1.** Fie $z\in\mathbb{C}$. Să se arate că $i(z-\bar{z})\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(m+1)x+m$ este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=5-x$.

5p **4.** Câți termeni ai dezvoltării $(1+2)^7$ sunt divizibili cu 14?

5p **5.** Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b=\dfrac{3\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a-\sin 2b=0$.

Soluții

1. Fie $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Atunci $\bar{z}=a-bi$.

Avem $i(z-\bar{z})=i(a+bi-a+bi)=-2b\in\mathbb{R}$.

2. Fie $f(x)=0$ ecuația de gradul al doilea atașată funcției f.

$\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2$. Condiția din problemă revine la $\Delta=0$, deci $m=1$.

3. Din condiția $x+1\geqslant 0$ și $5-x\geqslant 0$, obținem $x\in[-1,5]$. Prin ridicare la pătrat obținem $x+1=(5-x)^2$, adică $x^2-11x+24=0$, de unde $x\in\{8,3\}$. Cum $x\in[-1,5]$, rezultă că $x=3$ este soluția unică a ecuației.

4. $T_{k+1}=C_7^k 2^k, k=\overline{0,7}$. Pentru $k=\overline{1,6}$, termenii se divid cu 14, deci sunt 6 termeni.

5. Fie l lungimea laturii triunghiului echilateral. Cum $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$, atunci $l=2$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A=2\cdot 2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2$.

6. Avem $\sin 2a-\sin 2b=2\sin(a-b)\cos(a+b)$, adică

$\sin 2a-\sin 2b=2\sin(a-b)\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$.

VARIANTA 86

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}$ este real.

5p **2.** Numerele reale a şi b au suma 5 şi produsul 2. Să se calculeze valoarea sumei $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

5p **4.** Câte elemente ale mulţimii $A=\left\{x \mid x=C_7^k, k\in\mathbb{N}, k\leq 7\right\}$ sunt divizibile cu 7?

5p **5.** Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB=3$ şi $AD=6$. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se calculeze suma $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+\ldots+\cos 179^\circ$.

Soluţii

1. $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}=\frac{(1+3i)^2+(1-3i)^2}{1+9}=\frac{1+6i+9i^2+1-6i+9i^2}{10}=\frac{2-18}{10}=-\frac{8}{5}\in\mathbb{R}$.

2. $\overset{a)}{\frac{a}{b}}+\overset{b)}{\frac{b}{a}}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a+b)^2}{ab}-2=\frac{21}{2}$.

3. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

4. $A=\{1,7,21,35\}$; 3 elemente sunt multiplii de 7.

5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$. Aplicând teorema lui Pitagora în ΔABC, obţinem $AC=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$ de unde modulul vectorului este $2AC=6\sqrt{5}$.

6. Folosind formula $\cos(180^\circ-k)=-\cos k$, pentru $k=1^\circ,2^\circ,\ldots,89^\circ$, rezultă că suma este $-\cos 179^\circ-\cos 178^\circ-\cos 177^\circ-\ldots+\cos 90^\circ+\ldots+\cos 177^\circ+\cos 178^\circ+\cos 179^\circ=0$.

VARIANTA 87

5p **1.** Fie $z\in\mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unităţii, diferită de 1. Să se calculeze $1+z+z^2$.

5p **2.** Să se determine soluţiile întregi ale inecuaţiei $x^2+x-6\leq 0$.

5p **3.** Fie funcţia $f:(1,\infty)\to(2,\infty)$, $f(x)=x^2+1$. Să se arate că funcţia f este bijectivă.

5p **4.** Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 şi cu 8?

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=3\vec{i}+5\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Triunghiul ABC are laturile $AB=3$, $BC=5$ şi $AC=7$. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.

Soluţii

1. Dacă z este o rădăcină de ordin 3 a unităţii, atunci $z^3=1$, de unde $1+z+z^2=\frac{1-z^3}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0$.

2. Rezolvând în $\mathbb{R}$ inecuaţia, obţinem $x\in[-3;2]$. Soluţiile întregi sunt $-3,-2,-1,0,1,2$.

3. $\forall y\in(2,\infty)$, $\exists! x\in(1,\infty)$, $x=\sqrt{y-1}$ astfel încât $f(x)=y$. Deci funcţia f este bijectivă.

4. Numerele divizibile cu 6 şi cu 8 sunt divizibile cu 24. De la 1 la 100 sunt 4 astfel de numere: 24, 48, 72 şi 96.

5. Vectorii sunt coliniari dacă $\frac{a}{3}=\frac{a+1}{5}$; de unde $5a=3a+3$, adică $a=\frac{3}{2}$.

6. Semiperimetrul şi aria sunt $p=\frac{3+5+7}{2}=\frac{15}{2}$, $S=\sqrt{p(p-3)(p-5)(p-7)}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Atunci $r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

VARIANTA 88

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $a=\lg 2-\lg 20$, $b=C_3^2-C_4^2$ și $c=-\sqrt[3]{4\sqrt{4}}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ știind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y=x^2+2x+a$ la axa Ox este egală cu 1.

5p **3.** Numerele reale x și y verifică egalitatea $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\frac{\pi}{2}$. Să se arate că $x\cdot y=1$.

5p **4.** Să se arate că numărul A_n^3, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ este divizibil cu 3.

5p **5.** Punctele E,F,G,H sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[DA]$, $[AB]$, respectiv $[CD]$ ale patrulaterului $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{CA}$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg}x$, știind că $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ și $\sin 2x=-\frac{3}{5}$.

Soluții

1. $a=\lg\frac{1}{10}=-1$; $b=-3$; $c=-2$ deci $b<c<a$.

2. $x_V=-1$, $y_V=a-1$, deci $a=2$ sau $a=0$.

3. $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, deci $y\cdot x=1$ (s-a folosit relația $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$).

4. $A_n^3=n(n-1)(n-2)$ este divizibil cu 3 pentru $n\geq 3$, ca produs de trei numere consecutive.

5. $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$

6. Din $2x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ rezultă $\cos 2x>0$. Dar $\cos^2 2x=1-\sin^2 2x=\frac{16}{25}$, de unde $\cos 2x=\frac{4}{5}$. Atunci $\operatorname{tg}x=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\frac{-\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}}=-\frac{1}{3}$.

VARIANTA 89

5p **1.** Să se determine numerele complexe z care verifică relația $z+3i=6\cdot\bar{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1-2x|=|x+4|$.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+4x^2}$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor strict monotone $f:\{1,2,3\}\to\{5,6,7,8\}$.

5p **5.** Să se demonstreze că pentru orice punct M din planul paralelogramului $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

5p **6.** Fie a și b numere reale, astfel încât $a+b=\frac{\pi}{3}$. Să se arate că $\sin 2a-\sin 2b-\sin(a-b)=0$.

Soluții

1. Fie $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$. Atunci $\bar{z}=a-ib$. Avem $a+ib+3i=6a-6bi$. Rezultă $5a=0$ și $7b+3=0$, de unde $z=-\frac{3}{7}i$.

2. Avem $1-2x=x+4$ sau $2x-1=x+4$, deci $x=-1$ sau $x=5$.

3. Ecuația $f(x)=y$ devine $4yx^2-x+y=0$ și are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta\geq 0$, adică $y\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$. Atunci $\operatorname{Im}f=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$.

4. Sunt $C_4^3=4$ funcții strict crescătoare și tot 4 strict descrescătoare. În total sunt 8 funcții strict monotone.

5. Scriem relația sub forma $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}$, adică $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$, adevărat deoarece $ABCD$ este paralelogram.

6. Avem $\sin 2a-\sin 2b=2\sin(a-b)\cos(a+b)$. Cum $\cos(a+b)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, atunci $\sin 2a-\sin 2b=2\sin(a-b)\frac{1}{2}=\sin(a-b)$, adică $\sin 2a-\sin 2b-\sin(a-b)=0$.

VARIANTA 90

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația 3. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se determine a_1.

5p **2.** Să se determine toate perechile (a,b) de numere reale pentru care $a^2+b^2=a+b=2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg x+\lg(9-2x)=1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1,2,3,...,100\}$, acesta să nu fie divizibil cu 7.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2), B(1,-1)$ și $C(5,1)$. Să se determine ecuația dreptei duse din vârful A, perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Să se arate că $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$.

Soluții

1. Suma primilor 10 termeni este $\frac{2a_1+9\cdot 3}{2}\cdot 10$; $150=\frac{2a_1+9\cdot 3}{2}\cdot 10$. Atunci $a_1=\frac{3}{2}$.

2. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$. Notând $s=a+b, p=ab$ avem $s^2-2p=2$ și $s=2$ de unde $p=1$ și $(a,b)=(1,1)$.

3. Din condițiile de existență: $x>0$ și $9-2x>0$, avem $x\in\left(0,\frac{9}{2}\right)$ iar ecuația se scrie $x(9-2x)=10$. Obținem soluțiile $x_1=2$ și $x_2=\frac{5}{2}$.

4. Între 1 și 100 sunt 14 numere divizibile cu 7; $P=\frac{100-14}{100}=\frac{86}{100}=\frac{43}{50}$.

5. $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+2\vec{j}$. Atunci ecuația dreptei este de forma $4x+2y-a=0$.
Cum $4\cdot 0+2\cdot 2-a=0$, obținem $y=-2x+2$.

6. Înmulțim suma cu $\sin\frac{\pi}{5}$. Obținem

$$\sum_{k=0}^{4}\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2k\pi}{5}=\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}-\sin\frac{(2k-1)\pi}{5}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{9\pi}{5}-\sin\frac{-\pi}{5}\right)=0.$$

Observație: Alternativ, este suma părților reale ale rădăcinilor de ordin 5 ale unității.

VARIANTA 91

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\left(\sqrt{2}-1+i\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2$.

5p **2.** Să se determine numerele reale x și y astfel încât $x+2y=1$ și $x^2-6y^2=1$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$ nu este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze $C_{10}^3-C_9^3$.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ au același modul, să se arate că $ABCD$ este dreptunghi.

5p **6.** Să se arate că $\sin 40^\circ\cdot\sin 140^\circ=\cos^2 130^\circ$.

Soluții

1. $|z|=|(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)^2+2i(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)|=|3-2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}+2i|=$
$=|-4\sqrt{2}+2i|=\sqrt{(-4\sqrt{2})^2+4}=6$.

2. Din $x+2y=1$, rezultă $x=1-2y$. Atunci $x^2-6y^2=1$ devine $(1-2y)^2-6y^2=1$, $-4y-2y^2=0$, de unde $y=0$ sau $y=-2$. Obținem $x=1, y=0$ și $x=5, y=-2$.

3. De exemplu, $f(0)=1$ și $f(-1)=1$, deci $f(0)=f(-1)$ și atunci funcția nu e injectivă.

4. $C_{10}^3-C_9^3=C_9^2=\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}=36$.

5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$, deci $AC=BD$. Rezultă $ABCD$ este dreptunghi.

6. $\sin 40^\circ\cdot\sin 40^\circ=\sin^2 40^\circ=\cos^2(90^\circ-40^\circ)=\cos^2 50^\circ=\cos^2 130^\circ$.

VARIANTA 92

5p **1.** Numerele reale pozitive a,b,c,d sunt în progresie geometrică. Știind că $d-a=7$ și $c-b=2$, să se afle rația progresiei.

5p **2.** Să se determine valorile reale nenule ale lui m știind că $mx^2+x-2\le 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0,5)$ ecuația $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine numărul $n=C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8$.

5p **5.** Să se determine valorile reale ale lui a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-(2a+2)\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}-\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

Soluții

1. Fie q rația progresiei. Atunci $b=aq$, $c=aq^2$ și $d=aq^3$. Avem $a(q^3-1)=7$; $a(q-1)(q^2+q+1)=7$ și $aq(q-1)=2$ de unde $2(q^2+q+1)=7q$ având soluțiile $q=2$ sau $q=0,5$. Cum $b<c$, rezultă $q=2$.

2. Avem $mx^2+x-2\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă $m<0$ și $\Delta=1+8m\le 0$, de unde $m\le-\frac{1}{8}$.

3. Avem $2x+\frac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$, de unde

$x\in\left\{-\frac{\pi}{12}-(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. În intervalul $(0,5)$ avem soluțiile $\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}$.

4. Avem $C_{10}^2=C_{10}^8$ și $C_{10}^4=C_{10}^6$, deci $n=C_{10}^0=1$.

5. Dacă $\vec{u}\perp\vec{v}$, atunci $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Rezultă $(a+1)^2=0$, de unde $a=-1$.

6. Din $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, rezultă $\sin^2\alpha+\frac{1}{9}=1$. Cum $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, atunci

$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, de unde $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

VARIANTA 93

5p **1.** Să se calculeze modulele rădăcinilor complexe ale ecuației $z^2+2z+4=0$.

5p **2.** Să se determine funcțiile de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care sunt strict crescătoare și îndeplinesc condiția $f(f(x))=4x+3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}=12$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr natural de la 1 la 1000, acesta să fie cub perfect?

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(3,4)$. Să se calculeze distanța de la originea axelor la dreapta AB.

5p **6.** Să se determine $\alpha\in(0,2\pi)$ astfel ca $\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha$.

Soluții

1. Ecuația dată având coeficienți reali, rezultă $|z_1|=|z_2|$, de unde $z_1=\overline{z}_2$. Din a doua relație a lui Viéte avem $z_1z_2=4$; $|z_1z_2|=4$; $|z_1|^2=4$, adică $|z_1|=|z_2|=2$.

2. Cum funcția este de gradul I, avem $f(x)=ax+b$.

Din f crescătoare deducem că $a>0$. $f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$.

Din $a^2x+ab+b=4x+3$ rezultă $\begin{cases}a^2=4\\ab+b=3\end{cases}$. Cum $a>0$, atunci $a=2$, de unde $b=1$.

Așadar $f(x)=2x+1$.

3. Cum $4^{\frac{x+1}{2}}=2^{x+1}$, atunci ecuația devine: $2^x+2^{x+1}=12$; $2^x(1+2)=12$; $2^x=4$; $x=2$.

4. Cum $1=1^3$ și $1000=10^3$, între 1 si 1000 există 10 cuburi perfecte. $P=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$

5. $AB:x-y+1=0$; $d(O,AB)=\frac{|1\cdot 0-1\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Din $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha$, obținem $\sin\alpha(\cos\alpha-1)=0$.

Dacă $\sin\alpha=0$ cu $\alpha\in(0,2\pi)$ atunci $\alpha=\pi$.

Dacă $\cos\alpha-1=0$, adică $\cos\alpha=1$ cu $\alpha\in(0,2\pi)$ este imposibil. Deci $\alpha=\pi$.

VARIANTA 94

5p **1.** Să se calculeze $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$.

5p **2.** Să se arate că funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{-x}=2$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim?

5p **5.** Fie ABC un triunghi și O centrul cercului circumscris lui. Știind că $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin\alpha+\cos\alpha=1$. Să se calculeze $\operatorname{tg}2\alpha$.

Soluții

1. $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4=\left(\frac{3i-1+6+2i}{5}\right)^4=(i+1)^4=(2i)^2=-4$.

2. $f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=-\left[\ln(1-x)-\ln(1+x)\right]=$

$=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$. Rezultă că f este impară.

3. Avem $5^{-x}=\frac{1}{5^x}$. Notăm $5^x=y$. Ecuația devine $y+\frac{1}{y}=2$ și are soluția $y=1$.

Revenind la notația făcută: $5^x=1$; rezultă $x=0$.

4. Există patru cifre prime: $\{2,3,5,7\}$ și câte 100 de numere de trei cifre care încep cu câte una dintre aceste 4 cifre. Așadar, numărul de cazuri favorabile este 400. Numărul total de numere de trei cifre este 900. Rezultă $P=\frac{400}{900}=\frac{4}{9}$.

5. Din $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$ avem că O este mijlocul laturii BC și $AO=BO=CO$. Conform reciprocei teoremei medianei, deducem că triunghiul ABC este dreptunghic.

6. $\sin\alpha+\cos\alpha=1$. Ridicând relația la pătrat obținem: $2\sin\alpha\cos\alpha=0$, adică $\sin2\alpha=0$. Atunci $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=0$.

VARIANTA 95

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\frac{1}{|1+x|}=1$.

5p **3.** Să se studieze monotonia funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2009^x+\log_{2009}x$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

5p **5.** Să se demonstreze că vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru nicio valoare reală a numărului a.

5p **6.** Să se arate că $\sin x+\sin3x+\sin5x=(1+2\cos2x)\cdot\sin3x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Soluții

1. $\frac{10}{\sqrt{2}-1}=10\sqrt{2}+10$ și $24<10\sqrt{2}+10<25$, deci $\left[\frac{10}{\sqrt{2}-1}\right]=24$.

2. Condiția de existență: $|x+1|\neq0$, adică $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

$|x+1|=\begin{cases}x+1, x\in(-1,\infty)\\-(x+1), x\in(-\infty,-1)\end{cases}$.

Cazul I: $x\in(-1,\infty)$. Ecuația devine: $x+\frac{1}{x+1}=1$ și are soluția $x=0\in(-1;\infty)$.

Cazul II: $x\in(-\infty,-1)$. Ecuația devine: $x-\frac{1}{x+1}=1$ și are soluțiile $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$, dar $\sqrt{2}\notin(-\infty-1)$. Așadar: $S=\{-\sqrt{2},0\}$.

3. $f(x)=2009^x+\log_{2009}x=g(x)+h(x)$, unde $g,h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ și $g(x)=2009^x$, iar $h(x)=\log_{2009}x$. Cum g și h sunt strict crescătoare și suma lor este strict crescătoare.

4. Există 900 de numere de trei cifre. Produsul a trei cifre este impar doar dacă toate cifrele sunt impare, adică sunt din următoarea mulțime $\{1,3,5,7,9\}$. Așadar pot fi $5^3=125$ numere de trei cifre cu proprietatea cerută. Deci $P=\frac{125}{900}=\frac{5}{36}$.

5. $\vec{u}\perp\vec{v}$, dacă $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=3(a+1)+a^2=a^2+3a+3$. Fie $a^2+3a+3=0$.

Cum $\Delta=-3<0$, rezultă că nu există a real pentru care cei doi vectori să fie perpendiculari.

6. $\sin x+\sin5x=2\sin3x\cos2x$; rezultă $\sin x+\sin3x+\sin5x=2\sin3x\cos2x+\sin3x=$

$=\sin3x(2\cos2x+1)$.

VARIANTA 96

5p **1.** Fie a,b,c numere naturale nenule în progresie geometrică. Știind că $a+b+c$ este un număr par, să se arate că numerele a,b,c sunt pare.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x+2$. Să se arate că $f(a)+f(a+1)\geq 0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_2 x+\log_4 x>3$.

5p **4.** Să se determine numerele naturale n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=120$.

5p **5.** Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u}=2\vec{i}-a\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$ este obtuz dacă și numai dacă $a>2$.

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\sin A=\frac{1}{2}$, $\sin B=1$ și $BC=4$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Soluții

1. Fie q rația progresiei geometrice. Din $a+b+c=2k, k\in\mathbb{N}$, avem că $a+aq+aq^2=2k$, de unde $a(1+q+q^2)=2k$; dar $1+q+q^2$ este impar ($q+q^2$ este par deoarece q și q^2 au aceeași paritate). Deci $a=2p$. Atunci $b=aq=2pq$, $c=aq^2=2pq^2$. Așadar cele trei numere naturale sunt pare.

2. $f(a)+f(a+1)=a^2+3a+2+a^2+2a+1+3a+3+2=2a^2+8a+8=$
$=2(a^2+4a+4)=2(a+2)^2\geq 0, \forall a\in\mathbb{R}$.

3. Cum $\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{2}$, inecuația devine: $\log_2 x+\frac{\log_2 x}{2}>3$; $\log_2 x>2$, adică $\log_2 x>\log_2 4$, de unde $x>4$. Rezultă că $x\in(4,\infty)$.

4. Punem condițiile de existență: $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, $n\geq 2$. Rezultă $n\in[2,\infty)\cap\mathbb{N}$.

Dacă $C_n^1+C_n^2=120$, atunci $n+\frac{n(n-1)}{2}=120$, adică $n^2+n-240=0$, ecuație care are soluțiile $n_1=15, n_2=-16\notin\mathbb{N}$. Așadar $n=15$ este soluția ecuației date.

5. $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{2-a}{\sqrt{4+a^2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2-a}{\sqrt{2(4+a^2)}}$. Unghiul format de cei doi vectori este obtuz dacă și numai dacă cosinusul unghiului este negativ. Atunci $\cos(\vec{u},\vec{v})<0$, dacă $2-a<0$, de unde $a>2$.

6. Cum $\sin B=1$, atunci $m(\hat{B})=90°$. Cum $\sin A=\frac{1}{2}$, atunci $m(\hat{A})=30°$, de unde $m(\hat{C})=60°$. Deci $A_{\Delta ABC}=\frac{BC^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}=\frac{16\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}}=8\sqrt{3}$.

VARIANTA 97

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $3!$, $\sqrt[3]{100}$, $\log_2 32$.

5p **2.** Să se arate că $x^2+3xy+4y^2\geq 0$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin 2x=\cos x$.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3-4C_6^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele A,B,C astfel încât $A(1,3), B(2,5)$ și $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$. Să se determine coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are $BC=8$ și $\cos A=\frac{3}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

Soluții

1. $\left.\begin{array}{l} a=3!=6, \text{atunci } a^3=216 \\ b=\sqrt[3]{100}, \text{atunci } b^3=100 \\ c=\log_2 32=5, \text{atunci } c^3=125 \end{array}\right\}$. Rezultă $b<c<a$.

2. Dacă $y=0$, atunci inegalitatea devine $x^2\geq 0$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Dacă $y\neq 0$, atunci împărțim în inegalitate prin y^2 și notăm $t=\frac{x}{y}$, iar inegalitatea devine $t^2+3t+4\geq 0$. Cum $\Delta=9-16=-7<0$, atunci inegalitatea este adevărată.

3. Din $\sin 2x=\cos x$ rezultă $2\sin x\cos x-\cos x=0$, adică $\cos x(2\sin x-1)=0$.

Dacă $\cos x=0$, rezultă $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Dacă $\sin x=\frac{1}{2}$, rezultă $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}$.

Atunci $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $A_5^3-4C_6^2=60-4\cdot 15=0$.

5. Avem $A(1,3)$, $B(2,5)$ și fie $C(x,y)$.

Dacă $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, atunci $(x-1)\vec{i}+(y-3)\vec{j}=2(\vec{i}+2\vec{j})$, de unde $x=3, y=7$.

6. Cum $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ și $\cos x=\frac{3}{5}$, rezultă $\sin x=\frac{4}{5}$, deci $\sin A=\frac{4}{5}$.

Aplicăm teorema sinusului: $2R=\frac{a}{\sin A}=8\cdot\frac{5}{4}=10$, de unde $R=5$.

VARIANTA 98

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 3 + i$. Să se calculeze modulul numărului z.

5p **2.** Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți întregi care are o soluție egală cu $\sqrt{3}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$.

5p **4.** Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ care conțin cel puțin un număr par.

5p **5.** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

5p **6.** Știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{3}{5}$, să se calculeze tg a.

Soluții

1. $z = a + bi$, rezultă $\bar{z} = a - bi$. Cum $(a + bi) + 2(a - bi) = 3 + i$, atunci $a = 1$ și $b = -1$, de unde $|z| = \sqrt{2}$

2. Ecuația $x^2 - 3 = 0$, are rădăcinile $-\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}$.

3. Condiții: $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$; dacă notăm $\log_x 2 = t$, atunci $\log_{\sqrt{x}} 2 = \frac{\log_x 2}{\log_x x^{\frac{1}{2}}} = 2 \cdot t$.

Ecuația devine $3 \cdot t = 9$, adică $t = 3$, de unde $x = \sqrt[3]{2}$.

4. Avem $C_5^3 = 10$ submulțimi cu câte 3 elemente, și numai una singură cu toate 3 impare $\{1; 3; 5\}$. Deci avem $10 - 1 = 9$ submulțimi cu proprietatea cerută.

5. Avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, rezultă $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, de unde $a = b = -1$.

6. $\cos a = -\frac{4}{5}$; $\text{tg}a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4}$.

VARIANTA 99

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

5p **2.** Fie f o funcție de gradul întâi. Să se arate că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 9^x = \frac{4}{9}$.

5p **4.** Câte funcții $f : \{1,2,3,\ldots,10\} \to \{0,1\}$ au proprietatea că $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(10) = 2$?

5p **5.** Se consideră punctele $M(1,2), N(2,5)$ și $P(3,m)$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 5$.

5p **6.** Să se determine cel mai mare element al mulțimii $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$.

Soluții

1. $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; $\left[\sqrt{3} + \sqrt{2}\right] = 3$.

2. Funcția de gradul I este strict monotonă. Compunerea a două funcții având aceeași monotonie este o funcție strict crescătoare.

3. Notăm $3^x = y > 0$ deci $9^x = (3^x)^2 = y^2$ și obținem ecuația $9y^2 + 9y - 4 = 0$, cu $y = \frac{1}{3}$ și $x = -1$.

4. Numai 2 valori ale funcției sunt egale cu 1, restul fiind 0. Atunci avem $C_{10}^2 = 45$

5. $\overrightarrow{MN} = (1,3), \overrightarrow{MP} = (2, m-2)$, atunci $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (m-2)$, de unde $m = 3$.

6. Cum $1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\cos 1 > 0$. Cum 2 și $3 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $\cos 2 < 0$ și $\cos 3 < 0$.

Deci cel mai mare element este $\cos 1$.

VARIANTA 100

5p **1.** Să se arate că $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1+x| = 1-x$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[6]{x^2-2x+1} = \sqrt[3]{3-x}$.

5p **4.** Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{10}$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Știind că $A(1,1), B(5,2)$ și $G(3,4)$, să se calculeze coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie $a \in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \frac{2}{5}$. Să se calculeze $|\sin a|$.

Soluții

1. $\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}$; obținem $a=2,\ b=1$, deci $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Explicitând modulul obținem două ecuații $1+x = 1-x$, pentru $x \geq -1$, de unde rezultă că $x = 0$, și $1+x = -1+x$ pentru $x < -1$, care nu admite soluții. Deci $x = 0$.

3. Punem condiția $\sqrt[3]{3-x} \geq 0$, adică $x \leq 3$; ridicăm la puterea a șasea și obținem $x^2-2x+1 = (3-x)^2$, având soluția $x = 2$.

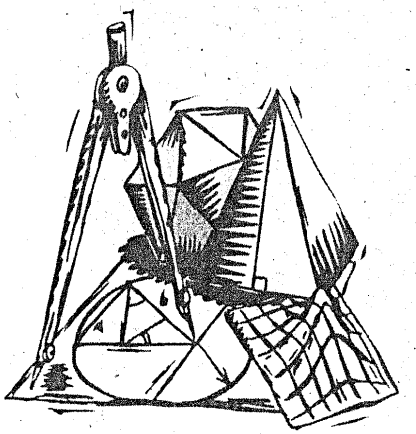
4. 11 divide toți termenii adunării, deci divide și suma $C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{10}$.

5. $x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3}$, adică $3 = \frac{6+x_C}{3}$, de unde $x_C = 3$. $y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$, adică $4 = \frac{3+y_C}{3}$, de unde $y_C = 9$.

6. Cum $\sin^2 a = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \frac{4}{29}$. Rezultă $|\sin a| = \frac{2}{\sqrt{29}}$.

SUBIECTUL II

Capitolul conține a doua categorie de subiecte, reprezentând 100 de grupuri de itemi, pentru disciplina **Matematică**, proba **D**, tipul de programă de examen **MT1.**



Notă.

Varianta finală a unei probe scrise la examenul de bacalaureat se va stabili prin extragerea din urne a trei numere, de la 1 la 100. Acestea corespund numărului de ordine al grupului de itemi din fiecare categorie de subiecte. Astfel, varianta finală a unei probe scrise va fi formată din 3 grupuri de itemi de categorii diferite, marcate prin denumirea: Subiectul I, Subiectul II și Subiectul III. Ca punctaje, acestora le sunt atribuite câte 30 de puncte. Punctajul total al variantei de subiecte este de 100 de puncte, la cele 90 de puncte, cât însumează cele trei subiecte, adăugându-se 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL II

VARIANTA 1

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi $b \neq 0$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $AX = XA$, atunci există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n=\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$

5p **c)** Să se rezolve în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_7$ şi polinomul $f=X^6+aX+\hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

5p **a)** Să se verifice că pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, are loc relaţia $b^6=\hat{1}$.

5p **b)** Să se arate că $x^6+\hat{5}=(x^3-\hat{4})(x^3+\hat{4})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Soluţii

1. a) Fie $X=\begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$ astfel încât $AX=XA$. $\begin{pmatrix} au+bw & av+bt \\ bu+aw & bv+at \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ua+vb & ub+va \\ wa+tb & wb+ta \end{pmatrix}$;

rezultă $\begin{cases} bw=bv \\ ub=tb \end{cases}, b \neq 0$, deci $\begin{cases} w=v \\ t=u \end{cases}$, adică $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

b) $P(n): A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n=\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.

$P(1): A=\begin{pmatrix} \dfrac{a+b+a-b}{2} & \dfrac{a+b-(a-b)}{2} \\ \dfrac{a+b-(a-b)}{2} & \dfrac{a+b+a-b}{2} \end{pmatrix}$ „Adevărată".

Presupunem $P(n)$ adevărată şi demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată.

$$A^{n+1}=A^n \cdot A=\begin{pmatrix} \dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & \dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \\ \dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & \dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(a+b)^n(a+b)+(a-b)^n(a-b)}{2} & \dfrac{(a+b)^n(b+a)-(a-b)^n(a-b)}{2} \\ \dfrac{(a+b)^n(b+a)-(a-b)^n(a-b)}{2} & \dfrac{(a+b)^n(a+b)+(a-b)^n(a-b)}{2} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(a+b)^{n+1}+(a-b)^{n+1}}{2} & \dfrac{(a+b)^{n+1}-(a-b)^{n+1}}{2} \\ \dfrac{(a+b)^{n+1}-(a-b)^{n+1}}{2} & \dfrac{(a+b)^{n+1}+(a-b)^{n+1}}{2} \end{pmatrix} \text{(A)}.$$

c) $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X^3=A$ cu $a=2, b=1$. Dar $X\cdot X^3=X^4$ și $X^3\cdot X=X^4$, de unde $X\cdot A=A\cdot X$, deci $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$ (din pct. **a)**).

$$X^3\overset{(b)}{=}\begin{pmatrix} \dfrac{(u+v)^3+(u-v)^3}{2} & \dfrac{(u+v)^3-(u-v)^3}{2} \\ \dfrac{(u+v)^3-(u-v)^3}{2} & \dfrac{(u+v)^3+(u-v)^3}{2} \end{pmatrix}, \text{ deci } \begin{cases} (u+v)^3+(u-v)^3=4 \\ (u+v)^3-(u-v)^3=2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (u+v)^3=3 \\ (u-v)^3=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} u+v=\sqrt[3]{3} \\ u-v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1+\sqrt[3]{3}}{2} \\ v=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{cases}, \text{ deci } X=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} & \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \\ \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} & \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. a) $\hat{1}^6=\hat{1},\ \hat{2}^6=\widehat{64}=\hat{1},\ \hat{3}^6=\widehat{729}=\hat{1},\ \hat{4}^6=\widehat{4096}=\hat{1},\ \hat{5}^6=\widehat{15625}=\hat{1},\ \hat{6}^6=\widehat{46656}=\hat{1}$.

b) $(X^3-\hat{4})(X^3+\hat{4})=X^6-\widehat{16}=X^6-\widehat{21}+\hat{5}=X^6+\hat{5}$.

c)

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
f	$\hat{5}$	$a+\hat{6}$	$\hat{2}a+\hat{6}$	$\hat{3}a+\hat{6}$	$\hat{4}a+\hat{6}$	$\hat{5}a+\hat{6}$	$\hat{6}a+\hat{6}$

Dacă $a=\hat{1}$, atunci $\hat{1}$ este rădăcina lui f, deci $f=(X+\hat{6})q_1$.

Dacă $a=\hat{2}$, atunci $\hat{4}$ este rădăcina lui f, deci $f=(X+\hat{3})q_2$. Dacă $a=\hat{3}$, atunci $\hat{5}$ e rădăcina lui f, deci $f=(X+\hat{2})q_3$. Dacă $a=\hat{4}$, atunci $\hat{2}$ e rădăcina lui f, deci $f=(X+\hat{5})q_4$.

Dacă $a=\hat{5}$, atunci $\hat{3}$ e rădăcina lui f, deci $f=(X+\hat{4})q_5$. Dacă $a=\hat{6}$, atunci $\hat{6}$ e rădăcina lui f, deci $f=(X+\hat{1})q_6$. Pentru $a=\hat{0}$ avem $f=X^6+\hat{5}=X^6-\hat{2}=X^6-\hat{3}^2=$
$=(X^3-\hat{3})(X^3+\hat{3})=(X^3+\hat{4})(X^3+\hat{3})$. Rezultă că $\forall a\in\mathbb{Z}_7$, f este reductibil.

VARIANTA 2

1. Se consideră matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=aA$.

5p **b)** Să se calculeze $(A-A^t)^{2009}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^5=A$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pentru a,b din mulțimea $M=[0,\infty)$ se definește $a*b=\ln(e^a+e^b-1)$.

5p **a)** Să se arate că dacă $a,b\in M$, atunci $a*b\in M$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, să se determine $a\in M$ astfel încât $\underbrace{a*a*\ldots*a}_{\text{de } n \text{ ori } a}=2a$.

Soluții

1. a) Din Cayley-Hamilton avem $A^2-Tr(A)\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2$.

Dar $Tr(A)=3$; $\det A=0$, deci $A^2-3A=O_2$, $A^2=3A$. Rezultă $a=3$.

b) $A^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A-A^t=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Fie $B=A-A^t$.

$B^1=B$; $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$B^4=B^3\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$.

Atunci $B^{2009}=B$.

c) $\det X=0$, deci $X^5=t^4\cdot X$, unde $t=\operatorname{tr}X$; deci $t^5=3$, de unde rezultă $t=\sqrt[5]{3}$ și $X=\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^4}}\cdot A$.

2. a) $a,b\in M$, deci $a\geq 0$ și $b\geq 0$; avem $e^a+e^b-1\geq 1, \forall a,b\geq 0$, de unde $\ln(e^a+e^b-1)\geq 0, \forall a,b\geq 0$, deci $a*b\in M$.

b) $(a*b)*c=\left[\ln(e^a+e^b-1)\right]*c=\ln\left(e^{\ln(e^a+e^b-1)}+e^c-1\right)=\ln(e^a+e^b+e^c-2)=$
$=a*(b*c), \forall a,b,c\in M$.

c) Prin inducție matematică se demonstrează că:

$\underbrace{a*a*...*a}_{n\ ori}=\ln\left[n\cdot e^a-(n-1)\right],\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2$.

$\ln\left[n\cdot e^a-(n-1)\right]=2a$, $n\cdot e^a-(n-1)=e^{2a}$, $e^{2a}-n\cdot e^a+(n-1)=0$. Fie $e^a=t>0$.

$t^2-nt+(n-1)=0$; $\Delta=n^2-4n+4=(n-2)^2$; $t_{1,2}=\dfrac{n\pm(n-2)}{2}$.

Dacă $t_1=n-1$, avem $e^a=n-1\Rightarrow a=\ln(n-1)$, dacă $t_2=1$, avem $e^a=1$, adică $a=0$.

VARIANTA 3

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice egalitatea $A^2-A=2I_3$.

5p **b)** Să se calculeze A^{-1}.

5p **c)** Să se arate că $A^{2009}+A^{2008}=2^{2008}(A+I_3)$.

2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este un inel comutativ, unde $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=x\cdot y-3x-3y+12$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$” este 4.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z},*,\circ)$ și $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=a\cdot x+b$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ...\circ x}_{\text{de 2009 ori } x}=2^{2009}+3$.

Soluții

1. a) $A^2-A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=2I_3$.

b) Din $A(A-I_3)=(A-I_3)A=2I_3$, obținem $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-I_3)$.

c) Se demonstrează prin inducție

2. a) $x\circ y=(x-3)(y-3)+3,\forall x,y\in\mathbb{Z}$;

$x\circ 4=(x-3)\cdot 1+3=x=(4-3)(x-3)+3=4\circ x,\forall x\in\mathbb{Z}$.

b) Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z};f(x)=ax+b$, izomorfism între $(\mathbb{Z},*,\circ)$ și $(\mathbb{Z},+,\cdot)$; deci $f(e_1)=0$ și $f(\theta_1)=1$, unde e_1 element neutru pentru „$*$” și θ_1 element neutru pentru „$\circ$”.

$f(3)=0$ și $f(4)=1$, de unde $\begin{cases}3a+b=0\\4a+b=1\end{cases}$, $\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$.

Deci $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ este de forma $f(x)=x-3$. Funcția f este bijectivă și $f(x*y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{Z}$; $f(x\circ y)=f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{Z}$.

c) Se demonstrează prin inducție matematică: $\underbrace{x*x*...*x}_{n\ ori}=(x-3)^n+3,\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\underbrace{x*x*...*x}_{2009\ ori}=(x-3)^{2009}+3$. Se obține $x=5$.

VARIANTA 4

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei A.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A^t\cdot A)=0$.

5p **c)** Să se determine o matrice nenulă $B\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Q})$ astfel încât $AB=O_2$.

2. Se știe că $(G,\circ)$ este grup, unde $G=(3,\infty)$ și $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to G$, $f(x)=x+3$.

5p **a)** Să se calculeze $4\circ 5\circ 6$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este un izomorfism de grupuri, de la $((0,\infty),\cdot)$ la $(G,\circ)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă H este un subgrup al lui G care conține toate numerele naturale $k\geq 4$, atunci H conține toate numerele raționale $q>3$.

Soluții

1. a) $A\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, deci $\text{rang}A\leq 2$. Avem $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-6\neq 0$, deci $\text{rang}A\geq 2$. Rezultă $\text{rang}A=2$.

b) $A^t\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 8 & 2\\ -4 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $\det(A^t\cdot A)=0$. **c)** $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

2. a) $4\circ 5\circ 6=5\circ 6=9$.

b) f este bijectivă și $f(xy)=f(x)\circ f(y)$; $xy+3=(x+3)\circ(y+3)$, $xy+3=xy+3$.

c) În G, elementul neutru este 4 și $\forall x\in G$ avem $x'=\frac{1}{x-3}+3$.

Deci, pentru $k\geq 4$, $k\in\mathbb{Z}$, avem $3+\frac{1}{k-3}\in H$.

Pentru orice $n\geq 4$; $k\geq 4$ obținem că $n\circ\left(3+\frac{1}{k-3}\right)=3+\frac{n-3}{k-3}\in H$, deci H conține toate numerele raționale mari mari decât 3.

VARIANTA 5

1. Se consideră punctele $A(0,6)$, $B(1,4)$, $C(-1,8)$ și matricea $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & a\\ 6 & 4 & 8 & b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.

5p **b)** Să se determine rangul matricei M în cazul $a=3,b=0$.

5p **c)** Să se arate că, dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M care conțin ultima coloană, este nul, atunci $\text{rang}(M)=2$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $x*y=5xy+6x+6y+6$.

5p **a)** Să se arate că legea "$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea "$*$".

5p **c)** Să se rezolve ecuația $\underbrace{x*x*x*\ldots*x}_{\text{de 2009 ori } x}=-1$.

Soluții

1. a) A, B, C coliniare dacă $\begin{vmatrix}0 & 6 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ -1 & 8 & 1\end{vmatrix}=0$. Cum $0=0$ "A".

b) Avem $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, rezultă că $\text{rang}M\geq 2$. Cum $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 6 & 4 & 0\end{vmatrix}=0$ și $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 6 & 4 & 8\end{vmatrix}=0$.

Atunci $\text{rang}M=2$.

c) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 6 & 4 & 8\end{vmatrix}=0$, dacă un minor de ordinul 3 ce conține coloana a IV-a este nul, atunci coloana a IV-a este o combinație dintre două coloane din primele trei, deci toți minorii de ordin trei sunt nuli și avem $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$; rezultă rang $M=2$.

2. a) $(x*y)*z=(5xy+6x+6y+6)*z=25xyz+30xy+30yz+30xz+36x+36y+36z+42$

$x*(y*z)=x*(5yz+6y+6z+6)=25xyz+30xy+30yz+30xz+36x+36y+36z+42$.

Rezultă că legea „*" este asociativă.

b) Determinăm elementul neutru al legii „*".

$x*e=x$; $5xe+6x+6e+6=x$; $5x(e+1)+6(e+1)=0$; $(5x+6)(e+1)=0$, de unde $e=-1$.

Determinăm elementele simetrizabile în raport cu „*".

$x*x'=e$; $5xx'+6x+6x'+6=-1$; $x'(5x+6)=-6x-7$, $x'=\frac{-6x-7}{5x+6}$;

$x'\in\mathbb{Z}\Rightarrow 5x+6\,|\,6x+7$; $5x+6\,|\,30x+35$. Dar $5x+6\,|\,5x+6$, adică $5x+6\,|\,30x+36$.

Deci $5x+6\,|\,1$; $5x+6\in\{-1;1\}$; $5x\in\{-7;-5\}$.

Cum $x\in\mathbb{Z}$ rezultă $x=-1$, de unde $x'=-1$.

c) Avem $\underbrace{x*x*x*...*x}_{\text{de 2009 ori}}=-1$. Cum ecuația $x*x'=-1$ avea soluție unică $x'=-1$,

atunci $\underbrace{x*x*x*...*x}_{\text{de 2008 ori}}=-1$ și, pe același principiu, obținem $x=-1$ unica soluție.

VARIANTA 6

1. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}\in S_5$.

5p **a)** Să se calculeze σ^{2009}.

5p **b)** Să se dea exemplu de o permutare $\tau\in S_5$ astfel încât $\tau\sigma\neq e$ și $(\tau\sigma)^2=e$.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru orice $\tau\in S_5$, există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\tau^p=e$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{C}$, x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3-2x^2+2x-a=0$ și determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_3&x_1&x_2\\x_2&x_3&x_1\end{vmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=1$, să se determine x_1, x_2 și x_3.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

Soluții

1. a) Din $\sigma^6=e$, avem că $\sigma^{2009}=\sigma^5=\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$.

b) Fie $\tau\in S_5$ astfel încât $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}$. Vom obține

$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}\cdot\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&5&4\end{pmatrix}$ (sau alegem $\tau=\sigma^2$).

c) Cum $\tau^1,\tau^2,...,\tau^{121}\in S_5$, $\exists q\geq r$ cu $\tau^q=\tau^r$. Luăm $p=q-r$.

2. a) $x^3-2x^2+2x-1=0$, $(x-1)(x^2-x+1)=0$, $x_1=1$, $x^2-x+1=0$ cu $x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-2x^2+2x-a$, $f'(x)=3x^2-4x+2$, $\Delta=-8<0$, deci $f'(x)>0$, adică f strict crescătoare. Rezultă f injectivă și continuă cu $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Rezultă că f admite o singură rădăcină reală.

c) Din relațiile lui Viète avem: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2;\\x_1x_2x_3=a\end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix}x_1+x_2+x_3&x_2&x_3\\x_1+x_2+x_3&x_1&x_2\\x_1+x_2+x_3&x_3&x_1\end{vmatrix}=$

$=2\begin{vmatrix}1&x_2&x_3\\1&x_1&x_2\\1&x_3&x_1\end{vmatrix}=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_3-x_2x_3-x_1x_2)=2(4-4-2)=-4$.

VARIANTA 7

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}$ și sistemul

$$\begin{cases}x+2y+3z+4t=3\\ y+2z+3t=2\\ z+2t=1\end{cases}.$$

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $XA=B$ nu are soluții $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k&2^k\\2^k&2^k\end{pmatrix}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, și pentru fiecare $t\in\mathbb{Z}$ notăm cu $H_t=\left\{A(kt-1)\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, n,p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice $t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ și $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

Soluții

1. a) Avem determinantul $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$, deci rang $A=3$.

b) Din a) rezultă că sistemul este compatibil simplu nedeterminat.
Avem $z=1-2t$, $y=t$, $x=0$.

c) $X\cdot A=B, X=(x\ \ y\ \ z)$; $(x\ \ y\ \ z)\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}=B$,

$(x\ \ 2x+y\ \ 3x+2y+z\ \ 4x+3y+2z)=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$. Obținem $\begin{cases}x=0\\2x+y=0\\3x+2y+z=0\\4x+3y+2z=1\end{cases}$,

un sistem care nu are soluții.

2. a) $A(n)\cdot A(p)=\begin{pmatrix}2^n&2^n\\2^n&2^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2^p&2^p\\2^p&2^p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+p+1}&2^{n+p+1}\\2^{n+p+1}&2^{n+p+1}\end{pmatrix}=A(n+p+1)$.

b) Elementul neutru în G este $A(e)$; avem $A(n)\cdot A(e)=A(e)\cdot A(n)=A(n)$, $A(n+e+1)=A(n)$, $e=-1$; deci $A(-1)$ este element neutru în G.
Elementele simetrizabile din G: $\forall A(n)\in G,(\exists)A(p)\in G$ a.î. $A(n)\cdot A(p)=A(p)\cdot A(n)=A(-1)$; avem $A(n+p+1)=A(-1)$, $p=-n-2$; deci $A(p)=A(-n-2)\in G$.
Verificăm că H_t este subgrup în G.
1) $(\forall)A(k_1t-1),A(k_2t-1),k_1,k_2\in\mathbb{Z}$ avem $A(k_1t-1)\cdot A(k_2t-1)\in H_t$.
Avem $A(k_1t-1)\cdot A(k_2t-1)=A[(k_1+k_2)t-2+1]=A[(k_1+k_2)t-1]\in H_t$.
2) $(\forall)A(kt-1)\in H_t$, $A(-kt+1-2)=A((-k)t-1)\in H_t$, deci $(H_t,\circ)$ este subgrup al grupului $(G,\circ)$.
c) Fie $f\colon G\to\mathbb{Z}$, $f(A(k))=k+1$. Se verifică dacă f este bijectivă. Apoi:
$f(A(k_1)\cdot A(k_2))=f(A(k_1))+f(A(k_2))$ dacă $f(A(k_1+k_2+1))=k_1+1+k_2+1$, adică $k_1+k_2+2=k_1+k_2+2$ (adev.). Deci f este morfism. Rezultă f izomorfism.

VARIANTA 8

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A^{2n}=\frac{2^{2n}-1}{3}A+\frac{2^{2n}+2}{3}I_3$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^3-x+a=0$, cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Să se calculeze $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$.

5p **b)** Să se calculeze x_2,x_3, dacă $x_1=2$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care x_1,x_2,x_3 sunt numere întregi.

Soluţii

1. a) $\det A=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-4$.

b) Se demonstrează prin inducţie matematică.

Pentru $n=1$, $A^2=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}=A+2I_3$, deci $P(1)$ este adevărată.

Dacă $P(n)$ este adevărată atunci

$$A^{2(n+1)}=A^{2n}\cdot A^2=\left(\frac{2^{2n}-1}{3}A+\frac{2^{2n}+2}{3}I_3\right)(A+2I_3)=\frac{2^{2(n+1)}-1}{3}A+\frac{2^{2(n+1)}+2}{3}I_3.$$

c) $A^t=A$; $A^*=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\frac{A^*}{\det A}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$.

2. a) $x^3-x+a=0;(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)=x^3-x+a$;

pentru $x=-1$ obţinem $-(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)=a$, $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)=-a$.

b) Dacă $x_1=2$, atunci $a=-6$ şi $x^3-x-6=(x-2)(x^2+2x+3)$. Dacă $x^2+2x+3=0$, atunci $x_2=-1-i\sqrt{2}$, iar $x_3=-1+i\sqrt{2}$.

c) *Metoda I:* Pentru ca ecuaţia să aibă rădăcini întregi trebuie ca $a\in\mathbb{Z}$.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x+a$.

$f'(x)=3x^2-1$, $f'(x)=0$ dacă $x\in\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$a+\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$a-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pentru ca ecuaţia $x^3-x+a=0$ să aibă 3 rădăcini reale, trebuie ca $a+\frac{2}{3\sqrt{3}}>0$ şi $a-\frac{2}{3\sqrt{3}}<0$; rezultă $a\in\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}},\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$. Dar $a\in\mathbb{Z}$, de unde rezultă că $a=0$.

Pentru $a=0$, ecuaţia devine $x^3-x=0$, cu rădăcinile $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

Metoda II: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=0-2(-1)=2$.

Cum $x_1\in\mathbb{Z}$, $x_2\in\mathbb{Z}$, $x_3\in\mathbb{Z}$, deducem că măcar una dintre rădăcini este nulă, de unde obţinem $a=0$ şi $x_{2,3}=\pm1$. Deci $a=0$.

VARIANTA 9

1. Fie $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ trei puncte din plan şi matricea $M=\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că, dacă A, B, C se află pe dreapta de ecuaţie $y=2x$, atunci $\det(M)=0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic şi are catetele de lungime 1, atunci $\det(M)=\pm 1$.

5p **c)** Să se arate că, dacă matricea M este inversabilă, atunci suma elementelor matricei M^{-1} este 1.

2. Se consideră mulţimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -3b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $X\in A$ şi $Y\in A$, atunci $X+Y\in A$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X\in A, Y\in A$ şi $XY=O_2$, atunci $X=O_2$ sau $Y=O_2$.

5p **c)** Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

Soluţii

1. a) Avem $\begin{vmatrix} x_A & 2x_A & 1\\ x_B & 2x_B & 1\\ x_C & 2x_C & 1\end{vmatrix}=0$.

b) Obţinem $\det(M)=\pm 2S_{ABC}=\pm 1$.

c) Fie $M^{-1}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$, cu $M^{-1}\cdot M=I_3$.

Avem $a_1+b_1+c_1=0$, $a_2+b_2+c_2=0$, $a_3+b_3+c_3=1$, de unde obţinem concluzia.

2. a) Fie $X=\begin{pmatrix} m & n\\ -3n & m\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} p & q\\ -3q & p\end{pmatrix}$. Calculăm $X+Y=\begin{pmatrix} u & v\\ -3v & u\end{pmatrix}$, cu $u=m+p\in\mathbb{Z}$, $v=n+q\in\mathbb{Z}$.

b) $XY=O_2\Rightarrow \det(X)\cdot\det(Y)=0$. Luând $X=\begin{pmatrix} m & n\\ -3n & m\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} p & q\\ -3q & p\end{pmatrix}$, vom avea $m^2+3n^2=0$ sau $p^2+3q^2=0$, de unde $m=n=0$ sau $p=q=0$.

c) Unitatea inelului este I_2. Dacă $X, Y\in A$ şi $XY=I_2$, atunci vom avea $\det(X)\cdot\det(Y)=1$ şi $\det(X),\det(Y)\in\mathbb{Z}$, deci $\det(X)=\pm 1$. Rezultă $X=\pm I_2$. Aceste două elemente sunt inversabile în inelul dat.

VARIANTA 10

1. Se consideră permutările $e, \alpha\in S_3$, $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze α^3.

5p **b)** Să se rezolve ecuaţia $\alpha^{2009}\cdot x=e$, $x\in S_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este permutare impară.

2. Fie inelul $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi|\ a,b\in\mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se dea exemplu de un număr complex z astfel încât $z\notin\mathbb{Z}[i]$ şi $z^2\in\mathbb{Z}[i]$.

5p **b)** Să se determine elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}[i]$.

5p **c)** Să se arate că mulţimea $H=\{(m+n)+(m-n)i|\ m,n\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}[i]$ în raport cu înmulţirea.

Soluţii

1. a) $\alpha^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$; $\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=e$.

b) $\alpha^3=e$; $\alpha^{2009}=(\alpha^3)^{669}\cdot\alpha^2$. Ecuaţia devine $\alpha^2\cdot x=e$, de unde $x=\alpha$.

c) $\sum_{\sigma\in S_3} m(\sigma)=1+1+2+2+3=9$. Fie $\sigma=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\sigma_3\cdot\sigma_4\cdot\sigma_5\cdot\sigma_6$ produsul căutat, cu o ordonare oarecare a factorilor. $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\sigma_1)\cdot\varepsilon(\sigma_2)\cdot\varepsilon(\sigma_3)\cdot\varepsilon(\sigma_4)\cdot\varepsilon(\sigma_5)\cdot\varepsilon(\sigma_6)$.

$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma_1)+m(\sigma_2)+m(\sigma_3)+m(\sigma_4)+m(\sigma_5)+m(\sigma_6)}=(-1)^9=-1$, deci σ este permutare impară.

2. a) Un exemplu este $z=\sqrt{2}(1+i)$.

b) Dacă $z=a+bi\in\mathbb{Z}[i]$ este inversabil, atunci $a^2+b^2=1$ cu soluţiile $a=\pm 1$ şi $b=0$ sau $a=0$ şi $b=\pm 1$. Vom avea $z\in\{\pm 1;\pm i\}$.

c) $z=a+bi$ cu $a,b\in\mathbb{Z}$ aparţine lui H dacă şi numai dacă $2|(a+b)$. Dacă $a+bi$, $c+di\in H$ vom avea $(a+bi)(c+di)\in H$ deoarece $2|c(a+b)+d(a-b)$.

VARIANTA 11

1. Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ și matricea transpusă A^t.

5p **a)** Pentru $a = c = 1$ și $b = d = 0$, să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, unde $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $|a| \leq 3$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $c < 0$, polinomul are cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a = 1$, $c = -1$, atunci $b = -1$.

Soluții

1. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se obține: $\det(A) = 4$.

b) $A^t = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$;

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & -ab+ab-cd+cd & -ac+bd+ac-bd & -ad-bc+cb+ad \\ -ab+ab-cd+cd & b^2+a^2+d^2+c^2 & bc+ad-ad-bc & bd-ac-db+ac \\ -ac+bd+ac-bd & bc+ad-ad-bc & c^2+d^2+a^2+b^2 & cd-cd+ab-ab \\ -ad-bc+bc+ad & bd-ac-bd+ac & cd-cd+ab-ab & d^2+c^2+b^2+a^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot I_4, \text{ unde } \alpha = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

c) $A \neq O_4$, atunci cel puțin unul dintre numerele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ este nenul; adică $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Folosind unicitatea inversei și punctul b) deducem că $A^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^t$.

2. a) $|a| = |-a| = |x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 3$.

b) $f(0) = c < 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Funcția polinomială asociată lui f este continuă pe $(0, \infty)$, deci ea (și polinomul f) are cel puțin o rădăcină reală în $(0, \infty)$.

c) $x_1 x_2 x_3 = 1$, de unde rezultă $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$. Din $c = -1 < 0$ și din punctul **b)** rezultă că f are rădăcina $x_1 \in (0, \infty)$ și cum $|x_1| = 1$, avem $x_1 = 1$.

Din prima și ultima relație a lui Viète rezultă $\begin{cases} x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 x_3 = 1 \end{cases}$.

Obținem $x_2 = x_3 = -1$ și, din a doua relație a lui Viète, $b = -1$.

VARIANTA 12

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile x_1, x_2 și $g = aX^2 + bX + c$, cu $a \neq 0$.

Fie matricele $A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $\det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^4 + \hat{4}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})$ și $f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p **c)** Să se descompună polinomul $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

Soluții

1. a) $\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & x_2 - x_1 \\ 1 & x_1^2 - 1 & x_2^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = (x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_2 - x_1)$.

Dar $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = P - S + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$. Deci $\det V = 3(x_2 - x_1)$

b) $\forall k \in \{1, 2\}$, $x_k \cdot g(x_k) = a \cdot x_k^3 + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k = a + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k$ și

$x_k^2 \cdot g(x_k) = a \cdot x_k^4 + b \cdot x_k^3 + c \cdot x_k^2 = a \cdot x_k + b + c \cdot x_k^2$; $g(1) = a + b + c$.

$$A \cdot V = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+b+a & c+bx_1+ax_1^2 & c+bx_2+ax_2^2 \\ a+b+c & a+cx_1+bx_1^2 & a+cx_2+bx_2^2 \\ a+b+c & b+ax_1+cx_1^2 & b+ax_2+cx_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}.$$

c) Din **b)**, $\det(A) \cdot \det(V) = \det(AV) = g(1) \cdot g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot \det(V)$;

$\det(V) \neq 0 \Rightarrow \det(A) = g(1) \cdot g(x_1) \cdot g(x_2)$; $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ cel puțin unul dintre numerele $1, x_1, x_2$ este rădăcină și pentru g. Obținem $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

2. a) $f(\hat{0}) = \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{0}$.

b) Funcția f nu e injectivă: $\hat{0} \neq \hat{1}$, cu $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{0}$. Domeniul lui f este o mulțime finită și coincide cu codomeniul și f nu e injectivă, deci nu e nici surjectivă.

c) $X^4 + \hat{4}X = X(X^3 + \hat{4}) = X(X^3 + \hat{4}^3) = X(X + \hat{4})(X^2 - \hat{4}X + \hat{1}) =$

$= X(X + \hat{4})(X^2 + X + \hat{1})$. Cum $f(\hat{2})$, $f(\hat{3})$ și $f(\hat{4}) \neq \hat{0}$, atunci $X^2 + X + \hat{1}$ nu se mai descompune.

VARIANTA 13

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$. Pentru fiecare $m\in\mathbb{R}$, notăm cu S_m mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $\min\left\{x^2+y^2+z^2 \mid (x,y,z)\in S_1\right\}$

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A\cdot B$ și mulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det(X)=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^4=B^6=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi, cu elemente numere complexe.

5p **c)** Să se demonstreze că $C^n\neq I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluții

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta=2\cdot(1-m)$. Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sistemul este compatibil determinat.

b) Pentru $m=1$, $\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$, $\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$, deci sistemul este compatibil.

c) Dacă $m=1$, sistemul are mulțimea soluțiilor $S_1=\left\{(x,1,2-x) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$. Avem $x^2+1^2+(2-x)^2=2x^2-4x+5$ și funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^2-4x+5$ are minimul $g(x_V)=g\left(-\frac{b}{2a}\right)=g(1)=3$.

2. a) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A^4=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$;

$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B^4=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

$B^6=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$.

b) Dacă $X,Y\in G$, $\det(X\cdot Y)=\det(X)\cdot\det(Y)=1$, deci $X\cdot Y\in G$. Dacă $X\in G$, atunci și $X^{-1}\in G$, deoarece $X\cdot X^{-1}=I_2$, $\det(X\cdot X^{-1})=\det I_2=1$, $\det X\cdot\det X^{-1}=1$, deci $\det X^{-1}=1$.

c) $C=A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$C^2=(AB)^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C^3=(A\cdot B)^3=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;...;

$C^n=\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}\cdot n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\neq I_2, \forall n$.

VARIANTA 14

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei A.

5p **b)** Să se arate că există $d\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=dA$.

5p **c)** Să se arate că există matricele $K\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $L\in M_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $A=K\cdot L$.

2. Se consideră numărul $a=\sqrt{3}-i\in\mathbb{C}$ și polinomul $f\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4-4X^2+16$.

5p **a)** Să se arate că $f(a)=0$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Soluții

1. a) $\det A=abc\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$, deci $\operatorname{rang}A<3$. După ce scoatem factorii comuni de pe fiecare coloană, toți minorii de ordinul 2 vor avea coloanele identice, deci sunt nuli. Atunci $\operatorname{rang}A<2$. Cum $a,b,c\neq 0$ rezultă că $\operatorname{rang}A=1$.

b) $A^2=\begin{pmatrix} a^2+2ab+3ac & ab+2b^2+3bc & ac+2bc+3c^2 \\ 2a^2+4ab+6ac & 2ab+4b^2+6bc & 2ac+4bc+6c^2 \\ 3a^2+6ab+9ac & 3ab+6b^2+9bc & 3ac+6bc+9c^2 \end{pmatrix}=(a+2b+3c)\cdot A$.

Atunci $d=a+2b+3c$.

c) Fie $K=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ și $L=\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. Vom avea $K\cdot L=A$.

2. a) $a^2=2-2\sqrt{3}\cdot i$ și $a^4=-8-8\sqrt{3}\cdot i$; $f(a)=0$.

b) Fie $X^2=t$; $t^2-4t+16=0$, $t_{1,2}=2\pm 2\sqrt{3}\cdot i$.

Mulțimea rădăcinilor lui f este $\{\sqrt{3}+i,\sqrt{3}-i,-\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}-i\}$.

c) Conform rădăcinilor găsite la punctul b), avem:

$f=(X-\sqrt{3}-i)(X-\sqrt{3}+i)(X+\sqrt{3}-i)(X+\sqrt{3}+i)=(X^2-2\sqrt{3}X+4)(X^2+2\sqrt{3}X+4)=$

$=X^4-4X^2+16$. Cum descompunerea în $\mathbb{R}[X]$ a lui f în factori ireductibili este unică, și cum ambele polinoame (factori ai descompunerii) au câte un coeficient irațional, deducem că f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

VARIANTA 15

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{Z}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $a+b+c\neq 0$ și A nu este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$, atunci $a=b=c$.

5p **c)** Să se arate că sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax+by+cz=\frac{1}{2}x \\ cx+ay+bz=\frac{1}{2}y \\ bx+cy+az=\frac{1}{2}z \end{cases}$ admite numai soluția $x=y=z=0$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4-5X^2+5$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că f are toate rădăcinile reale.

5p **c)** Să se arate că dacă g este un polinom cu coeficienți reali care are proprietatea că pentru orice x real $|g(x)|\leqslant|f(x)|$, atunci există $a\in[-1,1]$ astfel încât $g=af$.

Soluții

1. a) $\det(A)=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$.

b) $\det(A)=0$; $a+b+c\neq 0$, de unde rezultă că $a=b=c$.

c) Determinantul matricei sistemului $\begin{vmatrix} 2a-1 & 2b & 2c \\ 2c & 2a-1 & 2b \\ 2b & 2c & 2a-1 \end{vmatrix}$ este o sumă de 5 termeni pari și unul impar, rezultă că acesta este un număr impar, deci nenul. Atunci $x=y=z=0$.

2. a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_2\cdot x_3\cdot x_4+x_1\cdot x_3\cdot x_4+x_1\cdot x_2\cdot x_4+x_1\cdot x_2\cdot x_3}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}$;

$x_2\cdot x_3\cdot x_4+x_1\cdot x_3\cdot x_4+x_1\cdot x_2\cdot x_4+x_1\cdot x_2\cdot x_3=\frac{-a_1}{a_4}=0$; $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=0$.

b) Notând $x^2=t$ obținem ecuația $t^2-5t+5=0$. Avem $t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}>0$, deci ecuația inițială are toate rădăcinile reale.

c) Dacă $\text{grad}(g)>4$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|=+\infty$. Din ipoteză rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leqslant 1$, contradicție, aşadar $\text{grad}(g)\leqslant 4$. Din ipoteză deducem că $\forall k\in\{1,2,3,4\}$, $|g(x_k)|\leqslant|f(x_k)|=0$, deci $|g(x_k)|=0$, de unde rezultă $g(x_k)=0$, adică $g=a\cdot f$, cu $a\in\mathbb{R}$. Înlocuind în relația din ipoteză, obținem $|a|\leqslant 1$.

VARIANTA 16

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{R},\ a>0\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $A,B\in G$, atunci $AB\in G$.

5p **b)** Să se găsească două matrice $C,D\in G$ pentru care $CD\neq DC$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A\in G$, atunci $I_2-A+A^2\in G$.

2. Se consideră $a,b,c\in\mathbb{Q}$ şi polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c astfel încât polinomul f să aibă rădăcinile $x_1=x_2=1$ şi $x_3=-2$.

5p **b)** Să se arate că, dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci f are o rădăcină rațională.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ şi $f(1)$ sunt impare, atunci polinomul f nu are rădăcini întregi.

Soluții

1. a) $A,B\in G$, adică $\exists a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, $a_1>0,a_2>0$, astfel încât $A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $A\cdot B=\begin{pmatrix}a_1a_2 & a_1b_2+b_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $a_1a_2>0$, deci $AB\in G$.

b) $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $C\cdot D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $D\cdot C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, deci $C\cdot D\neq D\cdot C$.

c) $A\in G$, atunci $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$;

$A^2=\begin{pmatrix}a^2 & ab+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $I_2-A+A^2=\begin{pmatrix}a^2-a+1 & ab\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Cum $a^2-a+1>0$, atunci $I_2-A+A^2\in G$.

2. a) $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)=(X-1)^2(X+2)=X^3-3X+2$, deci $a=0$, $b=-3$, $c=2$.

b) $f\in\mathbb{Q}[X]$; $f(\sqrt{2})=0$, deci $f(-\sqrt{2})=0$; atunci f este divizibil cu polinomul $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})=X^2-2$. Avem $f=(X+a)(X^2-2)+(b+2)X+2a+c$, deci $b=-2$ şi $c=-2a$. Avem $f=X^3+aX^2-2X-2a=(X+a)(X^2-2)$. Rezultă $f(-a)=0$.

c) i) Presupunem că există $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(2m)=0$. Dar $f(2m)=2k+c$, de unde rezultă că c este par. Contradicție pentru că $c=f(0)$ care este impar.

ii) Presupunem că există $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(2m+1)=0$.

Dar $f(2m+1)=2p+1+a+b+c$, de unde $a+b+c+1$ este par. Contradicție pentru că $a+b+c+1=f(1)$ care este impar. Din i) şi ii) rezultă $f(k)\neq 0,\forall k\in\mathbb{Z}$.

VARIANTA 17

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2-B^2.

5p **b)** Să se calculeze $\det(I_2+A+A^2+A^3+A^4)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{Z})$.

2. Se consideră polinoamele $f, g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$ și $g=X^2-1$.

5p **a)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se calculeze $(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot(1-x_3)\cdot(1-x_4)$.

5p **c)** Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)$.

Soluții

1. a) $A^2=I_2$; $B^2=I_2$, deci $A^2-B^2=O_2$.

b) Cum $A^2=I_2$, atunci $A^3=A$ și $A^4=I_2$. Deci

$I_2+A+A^2+A^3+A^4=3I_2+2A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Rezultă că $\det(I_2+A+A^2+A^3+A^4)=5$.

c) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Atunci $X^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+dc & bc+d^2\end{pmatrix}$. Din $X^2=I_2$ obținem

$\begin{cases}a^2+bc=1\\ d^2+bc=1\\ ab+bd=0\\ ac+dc=0\end{cases}$; $\begin{cases}bc=(1-a)(1+a)\\ bc=(1-d)(1+d)\\ (a+d)\cdot b=0\\ (a+d)\cdot c=0\end{cases}$. Dacă $a+d=0$, atunci $a=-d$ și fie $b=1-a$, iar

$c=1+a$. Rezultă $X=\begin{pmatrix}a & 1-a\\ 1+a & -a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{Z}$.

2. a) Cum $f=g\cdot(X^2+X+2)+2X+3$, atunci restul căutat este polinomul $2X+3$.

b) $f=(X-x_1)\cdot(X-x_2)\cdot(X-x_3)\cdot(X-x_4)$;

$(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot(1-x_3)\cdot(1-x_4)=f(1)=5$.

c) $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$. Atunci

$(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)(-1-x_4)=f(-1)=1$, de unde $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4)=1$.

Din **b)** știm că $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)=5$, de unde $(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1)=5$.

Atunci $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)=(x_1-1)(x_1+1)(x_2-1)(x_2+1)(x_3-1)(x_3+1)(x_4-1)(x_4+1)=$

$=1\cdot 5=5$.

VARIANTA 18

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se afle rangul matricei I_3+A+A^t.

5p **c)** Să se determine inversa matricei I_3+A.

2. Se consideră $a, b\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^3+4aX^2+20X+b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, x_3 în cazul $a=2$, $b=0$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=8(4a^2-15)$.

5p **c)** Să se determine a, b astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$.

Soluții

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $A^3=O_3$.

b) $I_3+A+A^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Atunci $\operatorname{rang}(I_3+A+A^t)=1$.

c) $I_3+A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $\det(I_3+A)=1$; $(I_3+A)^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

$(I_3+A)^{-1}=\dfrac{(I_3+A)^*}{\det(I_3+A)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

2. a) Pentru $a=2$ și $b=0$, $f=X^3+8X^2+20X=X(X^2+8X+20)$ și are $x_1=0$, $x_2=-4-2i$ și $x_3=-4+2i$.

b) Conform relațiilor lui Viète, avem: $x_1+x_2+x_3=-4a$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=20$.

Atunci $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$

$=2\left[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\right]-40=2(16a^2-40)-40=8(4a^2-15)$.

c) Dacă $-a$ este rădăcină dublă pentru f, atunci $(X+a)(X+a)=X^2+2aX+a^2$ divide pe f. Cum $f=(X^2+2aX+a^2)(X+2a)+(20-5a^2)X+b-2a^3$ rezultă că $20-5a^2=0$ și $b-2a^3=0$. Obținem $a=2$ și $b=16$ sau $a=-2$ și $b=-16$.

VARIANTA 19

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=0 \\ x+y-z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \end{cases}$ și A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Fie polinomul $f=X^4+2X^3+aX^2-2X+1\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)=x^2\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+a+2\right]$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

Soluții

1. a) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-8$.

b) $\Delta_x=4$; $\Delta_y=-4$; $\Delta_z=-4$; $\Delta_t=-4$, de unde $x=-\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}$; $z=\frac{1}{2}$; $t=\frac{1}{2}$.

c) $A^t=A$; $A^*=\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $A^{-1}=\frac{A^*}{\det A}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. a) Conform relațiilor lui Viète avem $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=2$ și $x_1x_2x_3x_4=1$. Atunci $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{2}{1}=2$.

b) $x^2\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+a+2\right]=x^2\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}+2x-\frac{2}{x}+a+2\right)=$

$=x^4-2x^2+1+2x^3-2x+ax^2+2x^2=x^4+2x^3+ax^2-2x+1=f(x)$.

c) Fie $f(x)=0$. Dacă în $f(x)=x^2\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+a+2\right]=0$ notăm $x-\frac{1}{x}=y$, obținem $x^2(y^2+2y+a+2)=0$. Cum $x=0$ nu verifică ecuația $f(x)=0$, și cum ecuația $x-\frac{1}{x}=y$ are soluții pentru orice $y\in\mathbb{R}$, deducem că ecuația $y^2+2y+a+2=0$ trebuie să aibe rădăcini reale; punem condiția $\Delta\geqslant 0$ și obținem $a\leqslant -1$.

VARIANTA 20

1. Se consideră triunghiul ABC, cu laturile $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ și sistemul $\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$.

5p **a)** Să se rezolve sistemul în cazul $a=3, b=4, c=5$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluție unică.

5p **c)** Știind că soluția sistemului este (x_0, y_0, z_0), să se demonstreze că $x_0, y_0, z_0 \in (-1,1)$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a,b\in\mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Să se arate că $AB\in G$, pentru orice $A,B\in G$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor din mulțimea G care au determinantul nul.

Soluții

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-120\neq 0$. Se obține soluția unică

$x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$, $z=0$.

b) Determinantul sistemului este $\Delta=\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}=-2abc$.

$\Delta\neq 0$, deci sistemul are soluție unică.

c) Folosind formulele lui Cramer, obținem $x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A$.

A fiind unghi al triunghiului ABC, avem $A\in(0,\pi)$, deci $x_0=\cos A\in(-1,1)$.

Analog, obținem $y_0=\cos B\in(-1,1)$ și $z_0=\cos C\in(-1,1)$.

2. a) $a, b\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}$, deci fiecare poate lua câte 3 valori. Atunci numărul elementelor mulțimii G este $3\cdot 3=9$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$. Atunci $AB=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & a_1b_2+b_1a_2 \\ b_1a_2+a_1b_2 & b_1b_2+a_1a_2 \end{pmatrix}$. Cum $\mathbb{Z}_3$ este stabilă în raport cu înmulțirea, atunci $AB\in G$.

c) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\in G$; $\det A=a^2-b^2$; $\det A=0$, rezultă $a^2=b^2$, de unde $a=\hat{0}$, $b=\hat{0}$; $a=\hat{1}$, $b=\hat{1}$ sau $b=\hat{2}$; $a=\hat{2}$, $b=\hat{1}$ sau $b=\hat{2}$.

Deci cinci matrice din G au determinantul nul.

VARIANTA 21

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Știind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluții (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Să se dea un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ și $\det A^2=\hat{0}$.

5p **c)** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X\in G$.

Soluții

1. a) $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}=$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$.

b) Dacă $\Delta\neq 0$, atunci $\Delta_x=0$, $\Delta_y=\Delta$, $\Delta_z=0$. Rezultă că $x=0$, $y=1$, $z=0$.

c) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$ echivalent cu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, deci $a=b=c$. Cu această condiție, sistemul devine $\begin{cases} ax+ay+az=a \\ ax+ay+az=a \\ ax+ay+az=a \end{cases}$.

Cum $a\neq 0$, atunci $x+y=1-z$ și cum $x^2+y^2=z-1$, obținem tripletele de forma $\left(\frac{1-\alpha+\sqrt{(1-\alpha)(\alpha-3)}}{2},\frac{1-\alpha-\sqrt{(1-\alpha)(\alpha-3)}}{2},\alpha\right)$ și

$\left(\frac{1-\alpha-\sqrt{(1-\alpha)(\alpha-3)}}{2},\frac{1-\alpha+\sqrt{(1-\alpha)(\alpha-3)}}{2},\alpha\right)$, cu $\alpha\in[1,3]$ dacă se rezolvă în mulțimea numerelor reale.

2. a) $a,b,c\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$, deci fiecare poate lua câte 4 valori. Atunci numărul elementelor mulțimii G este $4\cdot4\cdot4=64$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$; $\det A=ac$; $\det A^2=a^2c^2$. Dacă $a=\hat{2}$, $c=\hat{3}$, atunci $ac=\hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{2}$ și $a^2c^2=\hat{4}\cdot\hat{9}=\hat{0}\cdot\hat{1}=\hat{0}$; b poate fi orice din $\mathbb{Z}_4$. De exemplu $A=\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}$.

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$; $X^2=\begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$; $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, rezultă $a^2=\hat{1}$, $c^2=\hat{0}$ și $b(a+c)=\hat{0}$; $a^2=\hat{1}$ pentru $a\in\{\hat{1};\hat{3}\}$; $c^2=\hat{0}$ pentru $c\in\{\hat{0};\hat{2}\}$.

Dacă $a=\hat{1}$; $c=\hat{0}$, atunci $b=\hat{0}$.

Dacă $a=\hat{1}$; $c=\hat{2}$, atunci $b=\hat{0}$.

Dacă $a=\hat{3}$; $c=\hat{0}$, atunci $b=\hat{0}$.

Dacă $a=\hat{3}$; $c=\hat{2}$, atunci $b=\hat{0}$.

Deci 4 soluții.

VARIANTA 22

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, distincte două câte două şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul $a+b+c\neq 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $a+b+c=0$, atunci sistemul este incompatibil.

2. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $a_0=0$ şi $a_{n+1}=a_n^2+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, cu $f(0)=0$ şi cu proprietatea că $f(x^2+1)=(f(x))^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(5)$.

5p **b)** Să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(a_n)=a_n$.

5p **c)** Să se arate că $f=X$.

Soluţii

1. a) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}\overset{\substack{C_2-C_1\\ C_3-C_1}}{=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix}=$

$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c^2+ca+a^2-b^2-ba-a^2)=$

$=(b-a)(c-a)[(c-b)(c+b)+a(c-b)]=(b-a)(c-a)(c-b)(c+b+a)$.

b) a, b, c distincte două câte două şi $a+b+c\neq 0$, rezultă că $\det A\neq 0$ iar soluţiile sunt date de regula lui Cramer.

$x=\frac{\Delta x}{\det A}=\frac{c-b}{\det A}$; $y=\frac{\Delta y}{\det A}=\frac{-(c-a)}{\det A}$; $z=\frac{\Delta z}{\det A}=\frac{b-a}{\det A}$.

c) Dacă $a+b+c=0$, atunci $\det A=0$, de unde $\operatorname{rang} A=2$. Matricea extinsă

$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ a^3 & b^3 & c^3 & 1 \end{pmatrix}$, având rangul 3, rezultă că sistemul este incompatibil.

2. a) Dând lui x, pe rând, valorile 0, 1, 2, obţinem

$f(1)=(f(0))^2+1=1$, $f(2)=(f(1))^2+1=2$, $f(5)=(f(2))^2+1=5$.

b) Avem $f(0)=0=a_0$. Demonstrăm prin inducţie matematică faptul că $f(a_n)=a_n$.

$f(a_{n+1})=(f(a_n))^2+1=a_n^2+1=a_{n+1}$.

c) Fie $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=b_mX^m+b_{m-1}X^{m-1}+\ldots+b_1X+b_0$. Avem:

$$\begin{cases} f(a_1)=a_1 \\ f(a_2)=a_2 \\ \vdots \\ f(a_m)=a_m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b_ma_1^m+b_{m-1}a_1^{m-1}+\ldots+b_1a_1+b_0=a_1 \\ b_ma_2^m+b_{m-1}a_2^{m-1}+\ldots+b_1a_2+b_0=a_2 \\ \vdots \\ b_ma_m^m+b_{m-1}a_m^{m-1}+\ldots+b_1a_m+b_0=a_m \end{cases}$$

Determinantul matricei acestui sistem, cu necunoscutele b_m, b_{m-1}, ..., b_1, b_0, este

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1^m & a_1^{m-1} & \ldots & 1 \\ a_2^m & a_2^{m-1} & \ldots & 1 \\ \ldots & & & \\ a_m^m & a_m^{m-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le m}(a_i-a_j)$$

Cum $a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_n+1>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, înseamnă că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător şi $a_i\neq a_j$ pentru $i\neq j$, deci $\Delta\neq 0$. Sistemul este compatibil determinat cu soluţia $b_0=0$, $b_1=1$, $b_2=b_3=\ldots=b_m=0$. Rezultă că $f=X$.

VARIANTA 23

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și mulțimea

$C(A)=\left\{X=\begin{pmatrix}a & 5b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{C}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, $\forall X\in C(A)$, $XA=AX$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $Y\in C(A)$ și $Y^2=O_2$, atunci $Y=O_2$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $Z\in C(A), Z\neq O_2$ și Z are toate elementele raționale, atunci $\det Z\neq 0$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_3$ și polinomul $f=X^3+\hat{2}X^2+a\in\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})$.

5p **b)** Pentru $a=\hat{2}$, să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

Soluții

1. a) Dacă vom considera $X=\begin{pmatrix}a & 5b\\ b & a\end{pmatrix}\in C(A)$, avem $AX=XA=\begin{pmatrix}5b & 5a\\ a & 5b\end{pmatrix}$.

b) Fie $Y=\begin{pmatrix}c & 5d\\ d & c\end{pmatrix}\in C(A)$ avem $Y^2=\begin{pmatrix}c^2+5d^2 & 10cd\\ 2cd & c^2+5d^2\end{pmatrix}$.

$Y^2=O_2$ dacă $\begin{cases}cd=0\\ c^2+5d^2=0\end{cases}$, adică $\begin{cases}c=0\\ d=0\end{cases}$. Rezultă că $Y=O_2$.

c) Fie $Z=\begin{pmatrix}a & 5b\\ b & a\end{pmatrix}\in C(A)$ cu $a,b\in\mathbb{Q}^*$.

$\det Z=a^2-5b^2$. Presupunem că $\det Z=0$, atunci $a^2-5b^2=0$; $a^2=5b^2$, $(a,b\neq 0)$.

Rezultă $\frac{a^2}{b^2}=5$, adică $\frac{a}{b}=\pm\sqrt{5}$. Absurd, $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}^*$.

2. a) $f(\hat{0})=a$; $f(\hat{1})=a$; $f(\hat{2})=\hat{1}+a$. Deci $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=\hat{3}a+\hat{1}=\hat{1}$.

b) Pentru $a=\hat{2}$, din **a)** știm că $f(\hat{0})=\hat{2}$, $f(\hat{1})=\hat{2}$, $f(\hat{2})=\hat{0}$. Deci $x=\hat{2}$ este singura rădăcină a polinomului f.

c) Din **a)** și **b)** rezultă că pentru $a\in\{\hat{0};\hat{2}\}$ polinomul este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

Pentru $a=\hat{1}$ vom obține polinomul f ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

VARIANTA 24

1. Se consideră o matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(zX)=z^3\det(X)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A-A^t)=0$.

5p **c)** Știind că $A\neq A^t$, să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A-A^t)=2$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Q}[X]$, cu $f=X^4-5X^2+4$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile polinomului f.

5p **b)** Să se determine polinomul $h\in\mathbb{Q}[X]$, pentru care $h(0)=1$ și care are ca rădăcini inversele rădăcinilor polinomului f.

5p **c)** Dacă g este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=2$, să se arate că ecuația $g(x)=0$ nu are soluții întregi.

Soluții

1. a) Dacă $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}$, atunci $zX=\begin{pmatrix}zx_{11} & zx_{12} & zx_{13}\\ zx_{21} & zx_{22} & zx_{23}\\ zx_{31} & zx_{32} & zx_{33}\end{pmatrix}$ și

$\det(zX)=z^3\det X$.

b) Dacă $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, atunci $A-A^t=\begin{pmatrix}0 & a_{12}-a_{21} & a_{13}-a_{31}\\ a_{21}-a_{12} & 0 & a_{23}-a_{32}\\ a_{31}-a_{13} & a_{32}-a_{23} & 0\end{pmatrix}$ și

$\det(A-A^t)=0$.

c) Dacă $A\neq A^t$, atunci există $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,3\}$ astfel încât $a_{ij}\neq a_{ji}$. Din matricea $A-A^t$ considerăm minorul $\begin{vmatrix}0 & a_{ij}-a_{ji}\\ a_{ji}-a_{ij} & 0\end{vmatrix}=(a_{ij}-a_{ji})^2\neq 0$. Cum $\det(A-A^t)=0$, înseamnă că $rang(A-A^t)=2$.

2. a) $X^4-X^2-4X^2+4=X^2(X^2-1)-4(X^2-1)=(X^2-1)(X^2-4)$; rezultă $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=-2$.

b) Rădăcinile polinomului h vor fi $y_1=1,\ y_2=-1,\ y_3=\frac{1}{2},\ y_4=-\frac{1}{2}$. Înseamnă că $\exists a\in\mathbb{Q}$ astfel încât $h=a(X-1)(X+1)\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}\right)=a\left(X^4-\frac{5}{4}X^2+\frac{1}{4}\right)$. Din $h(0)=1$ obținem $a=4$ și deci $h=4X^4-5X^2+1$.

c) Considerăm polinomul $P\in\mathbb{Z}[X]$, $P(x)=g(x)-2$, cu rădăcinile –2. –1, 1, 2. Înseamnă că $P=\left(X^4-5X^2+4\right)\cdot t$ și $g=\left(X^4-5X^2+4\right)\cdot t+2,\ t\in\mathbb{Z}[X]$.

Presupunem că există $\alpha\in\mathbb{Z}$ rădăcină a polinomului g. Vom avea $\left(\alpha^4-5\alpha^2+4\right)\cdot t(\alpha)+2=0,\left[\alpha^2\left(\alpha^2-5\right)+4\right]\cdot t(\alpha)=-2$. Dar $t(\alpha)\in\mathbb{Z}$ și $\left[\alpha^2\left(\alpha^2-5\right)+4\right]\vdots 4$ (se verifică imediat), deci membrul stâng al ultimei egalități va fi divizibil cu 4, iar –2 nu este divizibil cu 4, ceea ce conduce la o contradicție. Înseamnă că ecuația $g(x)=0$ nu are soluții întregi.

VARIANTA 25

1. În mulțimea S_3 a permutărilor de 3 elemente, se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că permutarea σ este pară.

5p **b)** Să se determine toate permutările $x\in S_3$, astfel încât $x\sigma=\sigma x$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x^2=\sigma$ cu $x\in S_3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X(a)=I_2+aA\,\middle|\,a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a,b\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ X(a)X(b)=X(ab+a+b)$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un grup abelian, unde „$\cdot$" reprezintă înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine $t\in\mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)...X(2009)=X(t-1)$.

Soluții

1. a) $m(\sigma)=1+1=2$, $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^2=1$, deci σ este pară.

b) $x\in\{e,\sigma,\sigma^2\}$. Prin verificarea directă celelalte nu convin.

c) Dacă $x\in S_3$ este o permutare impară, atunci $x^2=e$, de unde $x=\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

2. a) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+bA+aA+abA^2$.

$A^2=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=A$.

Rezultă $X(a)\cdot X(b)=I_2+A(a+b+ab)=X(a+b+ab)$.

b) $G_0: X(a),X(b)\in G,\ X(a)X(b)=X(a+b+ab);\ a+b+ab=(a+1)(b+1)-1$.

Deci dacă $a\neq-1$ și $b\neq-1$ avem $a+b+ab\neq-1$, deci $X(a)\cdot X(b)\in G$.

G_1. Asociativitate: În general mulțimea matricelor este asociativă:

$X(a)\cdot[X(b)\cdot X(c)]=[(X(a)\cdot X(b)]\cdot X(c),\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

G_2 : Existența elementului neutru

$\exists I_2=X(0)\in G$ a.î. $X(a)\cdot X(0)=X(0)\cdot X(a)=X(0),\ \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

G_3: $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \exists a'=\frac{-a}{1+a}\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ a.î. $X(a)\cdot X(a')=X(a')\cdot X(a)=X(0)$.

G_4: Comutativitate: $X(a)X(b)=X(a+b+ab)=X(b)X(a)$.

Rezultă că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

c) Fie „*” lege de compoziție pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $a*b=a+b+ab$, deci $a*b=(a+1)(b+1)-1$.

Se verifică prin inducție că: $1*2*3*...*n=(n+1)!-1$.

$X(a)\cdot X(b)=X(a*b)$; $X(1)\cdot X(2)...X(2009)=X(1*2*...*2009)=X(2010!-1)$.

Rezultă că $t=2010!$.

VARIANTA 26

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, cu $t\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $B^n=\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^2=A$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=3X^4-2X^3+X^2+aX-1\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$, unde $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $(X-1)^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

Soluții

1. a) Fie $X\in M_2(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$; $AX=XA$, $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}-b & -d\\ a & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & -a\\ d & -b\end{pmatrix}$, deci $c=-b$, $a=d$; rezultă $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

b) Relația dată se demonstrează prin inducție. Pentru $n=1$ avem $B=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$.

Presupunem $B^k=\begin{pmatrix}\cos kt & -\sin kt\\ \sin kt & \cos kt\end{pmatrix}$ adevărată și demonstrăm că

$B^{k+1}=\begin{pmatrix}\cos(k+1)t & -\sin(k+1)t\\ \sin(k+1)t & \cos(k+1)t\end{pmatrix}$.

Atunci $B^{k+1}=B^k\cdot B=\begin{pmatrix}\cos kt\cos t-\sin kt\sin t & -\sin kt\cos t-\cos kt\sin t\\ \sin kt\cos t+\cos kt\sin t & \cos kt\cos t-\sin kt\sin t\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\cos(k+1)t & -\sin(k+1)t\\ \sin(k+1)t & \cos(k+1)t\end{pmatrix}$. În aceste condiții $B^n=\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Presupunem X soluție a ecuației. Din a) rezultă $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

Din $\det(X^2)=1\Rightarrow \det(X)=1$, adică există $t\in[0;2\pi]$, $X=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$.

$X^2=A\Leftrightarrow \cos 2t=0$ şi $\sin 2t=1\Leftrightarrow t\in\left\{\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$.

2. a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_1x_4}{x_1x_2x_3x_4}=\frac{-\frac{a}{3}}{-\frac{1}{3}}=a$.

b) Conform teoremei împărţirii cu rest $f(x)=(x-1)^2C(x)+mx+n$ (1).
Derivând (1) se obţine $f'(x)=2(x-1)C(x)+(x-1)^2C'(x)+m$ (2), pentru valoarea $x=1$ în (1) şi (2) se obţine $m+n=1+a$ şi $m=8+a$, de unde $m=8+a$, $n=-7$.

c) Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile polinomului f.

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4)=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}<0$.

Rezultă că f nu are toate rădăcinile reale.

VARIANTA 27

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei $A+I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX=XA$, atunci există $x, y\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuaţia $Y^2=A$ nu are nicio soluţie în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+xy$.

5p **a)** Să se arate că legea „$*$" este asociativă.

5p **b)** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. Să se verifice relaţia $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2009}$.

Soluţii

1. a) $A+I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; $\det(A+I_2)=1$, rezultă $\operatorname{rang}(A+I_2)=2$.

b) Fie $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $X=\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}$, astfel încât $AX=XA$. $\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z & 0\\ t & 0\end{pmatrix}$, deci $\begin{cases}z=0\\ x=t\end{cases}$.

$X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$.

c) Fie $Y=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; $Y^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+dc & bc+d^2\end{pmatrix}$; $Y^2=A$, rezultă $\begin{cases}a^2+bc=0 & (1)\\ (a+d)\cdot b=0 & (2)\\ (a+d)\cdot c=1 & (3)\\ bc+d^2=0 & (4)\end{cases}$.

Din (2) şi (3) rezultă că $a+d\neq 0$ (5) şi $b=0$.
Dacă $b=0$, atunci din (1) şi (4) rezultă că $a=0$ şi $d=0$, adică $a+d=0$, contradicţie cu (5). Deci ecuaţia $Y^2=A$ nu are soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. a) $x*y=x+y+xy=(x+1)(y+1)-1$ pentru $x, y, z\in\mathbb{R}$.
Avem $x*(y*z)=(x+1)(y+1)(z+1)-1$ şi $(x*y)*z=(x+1)(y+1)(z+1)-1$, deci „$*$" este asociativă.

b) $f(x*y)=f(x+y+xy)=x+y+xy+1=x(y+1)+(y+1)=(x+1)(y+1)=f(x)\cdot f(y)$.

c) Demonstrăm prin inducţie că $x_1*x_2*\ldots*x_n=(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)-1$, deci

$1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2009}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2010}{2009}-1=2010-1=2009$.

VARIANTA 28

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(A-xI_2)=0$.

5p **b)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se determine numărul de soluții ale ecuației $X^3=A$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea de funcții

$G=\left\{f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\,f_{a,b}(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f_{-1,2}\circ f_{-1,2}$, unde „$\circ$" este compunerea funcțiilor.

5p **b)** Să se demonstreze că $(G,\circ)$ este un grup.

5p **c)** Să se arate că grupul G conține o infinitate de elemente de ordin 2.

Soluții

1. a). $A-xI_2=\begin{pmatrix}1-x & 0\\ 0 & 8-x\end{pmatrix}$; $\det(A-xI_2)=0$; $(1-x)(8-x)=0$, de unde $S=\{1;8\}$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Atunci $AX=\begin{pmatrix}a & b\\ 8c & 8d\end{pmatrix}$; $XA=\begin{pmatrix}a & 8b\\ c & 8d\end{pmatrix}$. $AX=XA$ rezultă că $b=c=0$ și $a,d\in\mathbb{C}$ de unde $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$.

c) Fie $Z\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, o soluție a ecuației. Atunci, $A\cdot Z=Z\cdot A$. Din **b)** rezultă că există $x,y\in\mathbb{C}$, astfel încât $Z=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}$ și obținem $\begin{cases}x^3=1\\ y^3=8\end{cases}$, adică 9 soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. a) $(f_{-1,2}\circ f_{-1,2})(x)=f_{-1,2}(f_{-1,2}(x))=-f_{-1,2}(x)+2=-(-x+2)+2=x$.

b) Se verifică axiomele grupului:

G_0: $\forall f_{a_1,b_1}\in G$, $f_{a_2,b_2}\in G$ rezultă $f_{a_1,b_1}\circ f_{a_2,b_2}\in G$, $f_{a_1,b_1}\circ f_{a_2,b_2}=f_{a_1a_2,a_1b_2+b_1}\in G$ deoarece $a_1a_2\neq 0$ pentru $a_1\neq 0$, și $a_2\neq 0$.

G_1: Compunerea funcțiilor este o operație în general asociativă.

G_2: $\exists f_{1,0}\in G, f_{1,0}(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, astfel încât $f_{1,0}\circ f_{a,b}=f_{a,b}\circ f_{1,0}=f_{a,b}$, $\forall f_{a,b}\in G$. Deci $f_{1,0}$ este element neutru.

G_3: $\forall f_{a,b}\in G$, $\exists f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$, astfel încât $f_{a,b}\circ f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}=f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}\circ f_{a,b}=f_{1,0}$.

c) Toate elementele de forma $f_{-1,-b}$ au ordin 2, $\forall b\in\mathbb{R}$.

VARIANTA 29

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x+y+z=0\\ mx+y+z=m-1\\ x+my+2z=-1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ și matricea

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & 1 & 1\\ 1 & m & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det A=0$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că sistemul are o soluție (x_0,y_0,z_0) cu $z_0=2$.

2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulțimea

$G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)\,\middle|\,X=\begin{pmatrix}a & \hat{2}b\\ b & a\end{pmatrix}\right\}$ și matricele $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $x,y\in\mathbb{Z}_3$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$ dacă și numai dacă $x=y=\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=G\setminus\{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=I_2$, $X\in G$.

Soluții

1. a) $\det A=m^2-3m+2=(m-1)(m-2)$; $\det A=0$ dacă $m\in\{1,2\}$.

b) Dacă $m\notin\{1,2\}$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil.

Dacă $m\in\{1,2\}$, sistemul este compatibil 1-nedeterminat.

c) Dacă $m\notin\{1,2\}$ sistemul este compatibil determinat. Prin calcul sau folosind regula Cramer obținem $(1,0,-1)$ soluție. Dacă $m=1$ soluția este $(a,1-a,-1)$, $a\in\mathbb{R}$. Dacă $m=2$ soluția este $(1,b,-1-b)$, $b\in\mathbb{R}$. Deci doar pentru $m=2$, se poate obține soluția $(1;-3,2)$.

2. a) $x\in\mathbb{Z}_3$ oarecare, deci $x^2\in\{\hat{0},\hat{1}\}$.

Așadar $x^2+y^2=\hat{0}$, dacă $x^2=y^2=\hat{0}$, adică $x=y=\hat{0}$.

b) Fie $X_1=\begin{pmatrix}a_1 & \hat{2}b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}a_2 & \hat{2}b_2\\ b_2 & a_2\end{pmatrix}$;

$X = X_1X_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + \hat{2}b_1b_2 & \hat{2}(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 + \hat{2}b_1b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix}$. Dacă $X_1X_2 \neq O_2$, atunci $\det X_1 \neq 0$, $\det X_2 \neq \hat{0}$. Dacă $\det X = \hat{0}$ implică $a^2 + b^2 = \hat{0}$, adică $a = b = \hat{0}$, deci $X = O_2$. Rezultă că $\det X_1X_2 = \det X_1 \cdot \det X_2 \neq \hat{0}$, deci H este parte stabilă a lui G în raport cu înmulțirea.

$X_1X_2 = I_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1a_2 + \hat{2}b_1b_2 = \hat{1} \mid \hat{2}a_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 = \hat{0} \mid \hat{2}b_1 \end{cases}$, adunând obținem: $\hat{2}a_1^2a_2 + \hat{2}a_2b_1^2 = \hat{2}a_1$,

$\hat{2}a_2(a_1^2 + b_1^2) = \hat{2}a_1$.

Cum $a_1^2 + b_1^2 \neq \hat{0}$ $(X_1 \neq O_2)$ avem $a_2 = a_1 \cdot (a_1^2 + b_1^2)^{-1}$.

Analog se determină $b_2 = \hat{2}b_1(a_1^2 + b_1^2)^{-1}$.

Cum $a_2^2 + b_2^2 = (a_1^2 + b_1^2)[(a_1^2 + b_1^2)^{-1}]^2 = (a_1^2 + b_1^2)^{-1} \neq \hat{0}$, deci $X_2 = X_1^{-1} \neq O_2$. Rezultă că H este subgrup.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix}$; $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + \hat{2}b^2 & ab \\ \hat{2}ab & a^2 + \hat{2}b^2 \end{pmatrix}$.

Dacă $X^2 = I_2$ rezultă $a^2 + \hat{2}b^2 = \hat{1}$ și $ab = \hat{0}$.

Pentru $a = \hat{0}$ nu există $b \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât $a^2 + \hat{2}b^2 = \hat{1}$.

Pentru $b = \hat{0}$, obținem $a = \hat{1}$ sau $a = \hat{2}$. Soluțiile ecuației sunt: $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

VARIANTA 30

1. Se consideră numerele reale a, b, c, funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$ și determinanții $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ și $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p **b)** Să se arate că $A = B$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $X(a)X(0) = X(a)$ și $X(a)X(b) = X(a+b-10ab)$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H = \left\{ X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2 = I_2$, $X \in G$.

Soluții

1. a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+b^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a)(c^2 + ac + a^2 - b^2 - ab - a^2) = (b-a)(c-a)[(c-b)(c+b) + a(c-b)] =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

b) $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = A + 0 + 0 = A$

c) Fie $M(a, f(a)), N(b, f(b)), P(c, f(c)) \in G_f$, $a, b, c \in \mathbb{N}$

$A_{MNP} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} = A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$;

$a, b, c \in \mathbb{N}$, deci sunt cel puțin două cu aceeași paritate; diferența lor este un număr par, deci $\Delta \vdots 2$.

Caz 1. Există două care dau același rest la împărțirea la 3. Atunci diferența lor este divizibilă cu 3.

Caz 2. Dau resturi distincte la împărțirea la 3, deci $a+b+c$ divizibil cu 3.

Așadar, $\Delta \vdots 3$, deci $\Delta \vdots 6$, $A_{MNP} = \frac{1}{2}|\Delta|$, deci $A_{MNP} \in \mathbb{N}$, $A_{MNP} \vdots 3$.

2. a) $A^2 = -10A$ (prin calcul). $X(a) \cdot X(0) = X(a) \cdot I_2 = X(a)$.

$X(a)X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a+b)A + abA^2 = I_2 + (a+b)A - 10abA =$

$= I_2 + (a+b-10ab)A = X(a+b-10ab)$.

b) $a+b-10ab = \frac{1}{10} - 10\left(b - \frac{1}{10}\right)\left(a - \frac{1}{10}\right)$.

Deci $a+b-10ab = \frac{1}{10}$ dacă $b = \frac{1}{10}$ sau $a = \frac{1}{10}$, deci $(\forall)\ X(a), X(b) \in H$ avem $X(a) \cdot X(b) \in H$, de unde H este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

c) $X \in G$, atunci $X = \begin{pmatrix} 1-a & 3a \\ 3a & 1-9a \end{pmatrix}$ și $X^2 = \begin{pmatrix} 1-2a+10a^2 & 6a-30a^2 \\ 6a-30a^2 & 1-18a+90a^2 \end{pmatrix}$.

$X^2 = I_2$ rezultă că $\begin{cases} 1-2a+10a^2 = 1 & (1) \\ 1-18a+90a^2 = 1 & (2) \\ 6a-30a^2 = 0 & (3) \end{cases}$. Din (3) obținem $a = 0$ sau $a = \frac{1}{5}$. Deci

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ sau $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

VARIANTA 31

1. Pentru $x \in \mathbb{C}$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **a)** Să se verifice că $(A(x))^2 = 2xA(x)$.

5p **b)** Să se determine toate numerele complexe x pentru care $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2 = A(0)$, $X \in M_2(\mathbb{C})$ nu are soluții.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$, care are forma algebrică $f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + \ldots + a_1X + a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $a_{100} + a_{99}$.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f are toate rădăcinile reale.

Soluții

1. a) $(A(x))^2 = \begin{pmatrix} (x+1)^2 + (x^2-1) & (x+1)(x^2-1) + (x^2-1)(x-1) \\ x+1+x-1 & x^2-1+(x-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2+2x & 2x^3-2x \\ 2x & 2x^2-2x \end{pmatrix} = 2xA(x)$

b) $\left[(A(x))^2\right]^2 = 4x^2(A(x))^2 = 8x^3 \cdot A(x)$; $(A(x))^4 + (A(x))^2 = (8x^3+2x)A(x)$;

$(8x^3+2x)A(x) = O_2$. Dacă $8x^3 + 2x \neq 0$ avem $A(x) = O_2$ (fals), deci

$8x^3 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(4x^2+1) = 0$, de unde $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\frac{i}{2}$.

c) $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Știm că orice $X \in M_2(\mathbb{C})$ verifică relația

$X^2 - X(a+d) + (ad-bc)I_2 = O_2$; $\det(A(0)) = 0$, atunci $\det X^2 = 0$; $(\det X)^2 = 0$, de unde $\det X = 0$; $ad - bc = 0$. Rezultă că $X^2 = (a+d)X$. Dacă $a+d = 0$ atunci

$X^2 = O_2$, contradicție. Dacă $a+d \neq 0$, atunci $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+d} & -\frac{1}{a+d} \\ \frac{1}{a+d} & -\frac{1}{a+d} \end{pmatrix}$. Dar

$\frac{1}{a+d} + \left(-\frac{1}{a+d}\right) = 0$, iar contradicție. Deci ecuația nu are soluții.

2. a) $a_{100}=2$ şi $a_{99}=0$, rezultă $a_{100}+a_{99}=2$.

b) Din teorema împărţirii cu rest, există şi sunt unice $q\in\mathbb{C}[X]$ şi $a,b\in\mathbb{C}$, astfel încât $f=(X^2-1)\cdot q+aX+b$. Se obţine $a=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$; $b=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$.

Cum $f(1)=f(-1)=-2^{51}$, restul împărţirii polinomului f la X^2-1 va fi $r=-2^{51}$.

c) Fie $z\in\mathbb{C}$ rădăcină a lui f. Avem $(z+i)^{100}=-(z-i)^{100}$, de unde obţinem $|z+i|=|z-i|$ şi, înlocuindu-l pe $z=a+b\cdot i$, cu $a,b\in\mathbb{R}$, deducem $b=0$, deci $z\in\mathbb{R}$.

VARIANTA 32

1. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul matricei sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Să se rezolve sistemul în cazul $a=-2$.

2. Se consideră mulţimea $G\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$,

$G=\left\{\begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Q},\ a^2-10b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A=\begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}\in G$.

5p **b)** Să se arate că $X\cdot Y\in G$, $\forall X,Y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulţimea G este infinită.

Soluţii

1. a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$.

b) Cum sistemul este compatibil determinat obţinem $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$. Cum $(0;0;1)$ este soluţie pentru orice $a\in\mathbb{R}$, vom obţine $(0;0;1)$ soluţie unică a sistemului.

c) Sistemul este compatibil nedeterminat cu soluţia $(\alpha;\alpha;1+\alpha)$.

2. a) $a=19$, $b=6$; $a^2-10b^2=361-360=1$, deci $A\in G$, $a,b\in\mathbb{Q}$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix} a_1 & 10b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ cu $a_1^2-10b_1^2=1$ şi $Y=\begin{pmatrix} a_2 & 10b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ cu $a_2^2-10b_2^2=1$. Atunci

$XY=\begin{pmatrix} a_1a_2+10b_1b_2 & 10(a_1b_2+a_2b_1) \\ a_1b_2+a_2b_1 & a_1a_2+10b_1b_2 \end{pmatrix}$; $(a_1a_2+10b_1b_2)^2-10(a_1b_2+a_2b_1)^2=$

$=a_1^2a_2^2+20a_1a_2b_1b_2+100b_1^2b_2^2-10a_1^2b_2^2-20a_1b_2a_2b_1-10a_2^2b_1^2=$

$=a_1^2(a_2^2-10b_2^2)-10b_1^2(a_2^2-10b_2^2)=a_1^2-10b_1^2=1$. Rezultă că $X\cdot Y\in G$.

c) $A=\begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}$; $A\in G$, deci $\{A^n/n\in\mathbb{N}^*\}\subset G$. Mulţimea $\{A^n\mid n\in\mathbb{N}^*\}$ este infinită, deci G este infinită.

VARIANTA 33

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ și $A=aI_3+bB+cB^2$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze B^3.

5p **b)** Să se calculeze B^{-1}.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a+b+c)\det(A)\geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ și $H=\left\{x^2 \mid x\in\mathbb{Z}_7\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $H=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$ există $x,y\in\mathbb{Z}_7$ astfel încât $a=x^2+y^2$.

5p **c)** Să se arate că $\{x^{2000}\mid x\in\mathbb{Z}_7\}=H$.

Soluții

1. a) $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$; $B^3=I_3$.

b) Din **a)** avem $B^3=I_3$, adică $B^2\cdot B=I_3$, de unde $B^{-1}=B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

c) $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$; $\det(A)=\begin{vmatrix}a+b+c&b&c\\a+b+c&a&b\\a+b+c&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\1&a&b\\1&c&a\end{vmatrix}=$

$=(a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$;

$(a+b+c)\cdot\det(A)=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)^2\cdot\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\geq 0$.

2. a) Fie $x\in\mathbb{Z}_7$, adică $x\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}\}$. Cum în $\mathbb{Z}_7$, $\hat{0}^2=\hat{0}$, $\hat{1}^2=\hat{1}$, $\hat{2}^2=\hat{4}$, $\hat{3}^2=\hat{2}$, $\hat{4}^2=\hat{2}$, $\hat{5}^2=\hat{4}$ și $\hat{6}^2=\hat{1}$, atunci $x^2\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}=H$.

b) Avem $a\in\mathbb{Z}_7$ și $x^2,y^2\in H$. Cum $\hat{0}=\hat{0}+\hat{0}$; $\hat{1}=\hat{1}+\hat{0}$; $\hat{2}=\hat{1}+\hat{1}$; $\hat{3}=\hat{1}+\hat{2}$; $\hat{4}=\hat{2}+\hat{2}$; $\hat{5}=\hat{1}+\hat{4}$ și $\hat{6}=\hat{2}+\hat{4}$, atunci pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$, există $x,y\in\mathbb{Z}_7$ astfel încât $a=x^2+y^2$.

c) $x^{2000}=(x^{1000})^2$. Dacă $x\in\mathbb{Z}_7$, atunci și $x^{1000}\in\mathbb{Z}_7$, iar din **a)** rezultă că $(x^{1000})^2\in H$, adică $\{x^{2000}\mid x\in\mathbb{Z}_7\}\subset H$. Rămâne să arătăm incluziunea inversă.

$\hat{0}^{2000}=\hat{0}$; $\hat{1}^{2000}=\hat{1}$;

$\hat{2}^{2000}=\hat{2}^{3\cdot 666+2}=\hat{4}$

$\hat{3}^{2000}=\hat{3}^{6\cdot 333+2}=\hat{2}$. De aici și egalitatea.

VARIANTA 34

1. Se consideră matricele $K=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $L=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $A=LK$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei A.

5p **b)** Să se arate că $A^2=32A$.

5p **c)** Să se arate că rangul matricei A^n este 1, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=axy-x-y+6$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$, unde a este o constantă reală.

5p **a)** Pentru $a=\frac{1}{3}$, să se demonstreze că legea „$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se arate că legea „$*$" admite element neutru dacă și numai dacă $a=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Să se arate că dacă intervalul $[0; 6]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$", atunci $a\in\left[\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]$.

Soluții

1. a) $A=LK=\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\5 & 10 & 15\\6 & 12 & 18\end{pmatrix}$. Suma elementelor matricei A este

$4(1+2+3)+5(1+2+3)+6(1+2+3)=6(4+5+6)=6\cdot 15=90$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}128 & 256 & 384\\160 & 320 & 480\\192 & 384 & 576\end{pmatrix}=32A$.

c) Vom demonstra prin inducție că $A^n=32^{n-1}A$.

Presupunem că $A^n=32^{n-1}A$ și arătăm că $A^{n+1}=32^nA$.

Pentru $n=2$ egalitatea este verificată la punctul b).

$A^{n+1}=A^n\cdot A=32^{n-1}\cdot A\cdot A=32^{n-1}\cdot A^2=32^{n-1}\cdot 32A=32^n\cdot A$.

$\det A=4\cdot 5\cdot 6\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$, deci rang $A=1$. Rezultă $\operatorname{rang}A^n=\operatorname{rang}(32^{n-1}A)=1$.

2. a) Pentru $a=\frac{1}{3}$ avem: $x*y=\frac{xy}{3}-x-y+6$.

Asociativitatea: $(x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x, y, z\in\mathbb{R}$. Prin calcul obținem

$(x*y)*z=\frac{1}{9}xyz-\frac{1}{3}(xy+xz+yz)+x+y+z$, dar și

$x*(y*z)=\frac{1}{9}xyz-\frac{1}{3}(xy+xz+yz)+x+y+z$. Deci legea este asociativă.

b) Fie e elementul neutru; atunci avem $x*e=e*x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $axe-x-e+6=x$, În particular, pentru $x=0$ obținem $e=6$. Înlocuind obținem:

$6ax-x-6+6=x$, $2x(3a-1)=0$ ceea ce implică $a=\frac{1}{3}$. Reciproca este evidentă.

c) $[0; 6]$ parte stabilă în raport cu „$*$" rezultă că, dacă $x, y\in[0, 6]$, atunci și $x*y\in[0, 6]$, adică $0\leqslant axy-x-y+6\leqslant 6$.

$0\leqslant axy-x-y+6$; $-6\leqslant axy-x-y\ \ |\cdot(-1)$; $-axy+x+y\leqslant 6$; dar $0\leqslant x+y\leqslant 12$ și scăzând cele două relații obținem $-axy\leqslant -6$; cum $0\leqslant xy\leqslant 36$, obținem $-a\leqslant -\frac{1}{6}$, adică $a\geqslant\frac{1}{6}$ (1).

$axy-x-y+6\leqslant 6$; $axy-x-y\leqslant 0$; dar $0\leqslant x+y\leqslant 12$; adunând cele două relații obținem $axy\leqslant 12$. Cum $0\leqslant xy\leqslant 36$, obținem $a\leqslant\frac{1}{3}$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $a\in\left[\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]$.

VARIANTA 35

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că ecuația $AX=B$ are o infinitate de soluții $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se verifice că $A^3=10A$.

5p **c)** Să se determine rangul matricei A^*, adjuncta matricei A.

2. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, funcția $f:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}$, $f(a+b\sqrt{2})=a^2-2b^2$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ și mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\mid f(x)=-1\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $7+5\sqrt{2}\in A$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $f(xy)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea A este infinită.

Soluții

1. a) Dacă $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, ecuația e echivalentă cu sistemul $\begin{cases}x+2y-z=2\\ 2x+2y=1\\ x+4y-3z=5\end{cases}$.

Sistemul este compatibil nedeterminat, deoarece rangul matricei sistemului este egal cu 2, ca și rangul matricei extinse.

b) $A^2=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 6 & 8 & -2\\ 6 & -2 & 8\end{pmatrix}$. $A^3=\begin{pmatrix}10 & 20 & -10\\ 20 & 20 & 0\\ 10 & 40 & -30\end{pmatrix}=10A$.

c) $A^*=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 2\\ 6 & -2 & -2\\ 6 & -2 & -2\end{pmatrix}$; $\operatorname{rang}(A^*)=1$.

2. a) $f(7+5\sqrt{2})=49-50=-1$, de unde $7+5\sqrt{2}\in A$.

b) Fie $x=a_1+b_1\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ și $y=a_2+b_2\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

$f\big((a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})\big)=(a_1a_2+2b_1b_2)^2-2(a_1b_2+a_2b_1)^2=(a_1^2-2b_1^2)(a_2^2-2b_2^2)=$

$=f(a_1+b_1\sqrt{2})\cdot f(a_2+b_2\sqrt{2})$.

c) Cum $f(7+5\sqrt{2})=-1$; $f[(7+5\sqrt{2})^3]=-1$; $f[(7+5\sqrt{2})^5]=-1$; ...;

$f[(7+5\sqrt{2})^{2n+1}]=-1$, rezultă că mulțimea A este infinită.

VARIANTA 36

1. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $A^2=O_2$.

5p **a)** Să se arate că $a+d=0$.

5p **b)** Să se arate că matricea I_2+A este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că ecuația $AX=O_2$ are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-2X^2+9$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$, numărul $a=\sqrt{2}+i$ și mulțimile $A=\{g(a)\mid g\in\mathbb{Q}[X]\}$ și $B=\{h(a)\mid h\in\mathbb{Q}[X],\operatorname{grad}(h)\leqslant 3\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(a)$.

5p **b)** Să se calculeze $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|$.

5p **c)** Să se arate că $A=B$.

Soluții

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & d^2+bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Presupunem prin absurd că $a+d\neq 0$, deci $b=0$, $a=d=0$, adică $a+d=0$, contradicție.

b) Cum $A^2=O_2$, atunci $(I_2-A)(I_2+A)=I_2-A^2=I_2$.

$\det I_2=1$ și cum $\det\big[(I_2-A)(I_2+A)\big]=\det(I_2-A)\cdot\det(I_2+A)=\det I_2\neq 0$, atunci $\det(I_2+A)\neq 0$, de unde I_2+A este inversabilă.

c) Din $A^2=O_2$ rezultă că $A\cdot A=O_2$; $A\cdot A\cdot a=O_2$, $a\in\mathbb{R}$.

Fie $A\cdot a=X$. Cum a arbitrar în $\mathbb{R}$, rezultă o infinitate de matrice X cu proprietatea că $AX=O_2$.

2. a) $f(a)=a^4-2a^2+9=(\sqrt{2}+i)^4-2(\sqrt{2}+i)^2+9=0$.

b) Fie $x_1=a=\sqrt{2}+i$, deci $x_2=\sqrt{2}-i$. Prin calcul obținem $x_3=-\sqrt{2}-i$ și $x_4=-\sqrt{2}+i$; $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|=|\sqrt{2}+i|+|\sqrt{2}-i|+|-\sqrt{2}-i|+|-\sqrt{2}+i|=$

$=\sqrt{2+1}+\sqrt{2+1}+\sqrt{2+1}+\sqrt{2+1}=4\sqrt{3}$.

c) $A\supset B$ evident deoarece A conține și valori ale polinoamelor cu gradul $\leqslant 3$.

Fie $\alpha\in A$ și $g\in\mathbb{Q}[X]$ astfel încât $g(a)=\alpha$. Din teorema împărțirii cu rest rezultă că există $q\in\mathbb{Q}[X]$ și $m,n,p,r\in\mathbb{Q}$ astfel încât $g=f\cdot q+mx^3+nx^2+px+r$.

$\alpha=g(a)=ma^3+na^2+pa+r$, de unde rezultă că $\alpha\in B$. În concluzie, $A=B$.

VARIANTA 37

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A-A^t\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\operatorname{rang} A\geq 2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p,q,r\in(0,\infty)$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcţie de p, q şi r.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă a,b,c sunt trei numere reale astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ şi $abc<0$, atunci $a,b,c\in(-\infty,0)$.

Soluţii

1. a) $\det A=\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}\overset{\substack{C_2-C_1\\ C_3-aC_1}}{=}\begin{vmatrix} a & 1 & -a^2+a+2 \\ b & 1 & -ab+b+2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-ab+b+2+a^2-a-2=$

$=a(a-1)-b(a-1)=(a-1)(a-b)$.

b) $A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & a+1-b & a+1 \\ b-a-1 & 0 & b+1 \\ 1-a-2 & -1-b & 0 \end{pmatrix}$;

$\det(A-A^t)=-(a+1-b)\begin{vmatrix} b-a-1 & b+1 \\ 1-a-2 & 0 \end{vmatrix}+(a+1)\begin{vmatrix} b-a-1 & 0 \\ 1-a-2 & -1-b \end{vmatrix}=$

$=(a+1-b)(b+1)(1-a-2)+(a+1)(b-a-1)(-1-b)=$

$=(a+1-b)(b-ab-2b+1-a-2+a+ab+1+b)=0$.

c) Cum minorul $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=b-b-1=-1\neq 0$ rezultă că $\operatorname{rang} A\geq 2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

2. a) Dacă $x\in[0,\infty)$ avem x^3, $p\cdot x^2$, $q\cdot x\in[0,\infty)$. Cum $r>0$ se obţine $f(x)=x^3+p\cdot x^2+q\cdot x+r>0$, deci f nu are rădăcini în $[0;+\infty)$.

b) $S_1=x_1+x_2+x_3=-p$, $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q$; $S_3=x_1x_2x_3=-r$. Folosim $(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1\cdot x_3+x_2x_3)-3x_1x_2x_3$.

Deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=S_1^3-3S_1S_2+3S_3=-p^3+3pq-3r$.

c) Fie polinomul $g\in\mathbb{R}[X]$, $g=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc$, cu rădăcinile a,b,c. Pentru $p=-(a+b+c)>0$, $q=ab+bc+ca>0$ şi $r=-abc>0$. Din a) rezultă că rădăcinile a, b, c ale lui g nu sunt în intervalul $[0,\infty)$.

Se obţine că $a,b,c\in(-\infty,0)$.

VARIANTA 38

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice

$M=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $AX=XA$, atunci $X\in M$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.

2. Se consideră polinomul $f=aX^4+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că numărul $f(3)-f(1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$, numărul $f(x)-f(y)$ este divizibil cu $x-y$.

5p **c)** Să se determine coeficienții polinomului f știind că $f(1)=4$ și $f(b)=3$.

Soluții

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$.

b) Dacă $X=\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, din $A\cdot X=X\cdot A$ rezultă $g=0$, $d+g=0$,

$a=e+h$, $d=h$, $a+b=f+i$, $d+e=i$ și $g+h=0$. Se obține $\begin{cases}g=d=h=0\\a=e=i\\b=f\end{cases}$,

deci $x\in M$.

c) Dacă $X^2=A$, atunci $X^3=AX$; $X\cdot X^2=AX$; $XA=AX$.

Dacă $XA=AX$ atunci, conform **b)**, $X=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$ și $\det X=a^3$.

Din $X^2=A$ rezultă că $\det X^2=\det A=0$; $(\det X)^2=0$; $\det X=0$. Deci $a^3=0$,

adică $a=0$, de unde $X=\begin{pmatrix}0&0&0\\b&0&0\\c&b&0\end{pmatrix}$ și $X^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\b^2&0&0\end{pmatrix}\neq A$.

Deci nu există $X\in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $X^2=A$.

2. a) $f(3)-f(1)=81a+3b+c-a-b-c=80a+2b$ care este număr par.

b) $f(x)-f(y)=ax^4+bx+c-ay^4-by-c=a(x^4-y^4)+b(x-y)=$

$=a(x-y)(x+y)(x^2+y^2)+b(x-y)=(x-y)[a(x+y)(x^2+y^2)+b]\ \vdots\ (x-y)$.

c) Cum $b-1$ divide $f(b)-f(1)=-1$ rezultă $b\in\{0,2\}$. Dacă $b=0\Rightarrow a=1$, $c=3$.

Dacă $b=2\Rightarrow a=-\frac{1}{5}\notin\mathbb{Z}$.

VARIANTA 39

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ și A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul, în cazul în care a,b,c sunt distincte două câte două.

5p **c)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului, în cazul în care $a=b\neq c$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-5b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $x=9+4\sqrt{5}\in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că M este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea M are o infinitate de elemente.

Soluții

1. a) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}\overset{\substack{C_2-C_1\\ C_3-C_1}}{=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ c & b \end{vmatrix}=$

$=(a-b)(a-c)(c-b)$.

b) a, b, c distincte două câte două, rezultă că $\det A\neq 0$, de unde $\operatorname{rang} A=3$ (numărul necunoscutelor). Deci sistemul are soluția banală $x=y=z=0$.

c) Dacă $a=b$, atunci $\det A=0$ și $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & c \\ ac & ac & a^2 \end{pmatrix}$. Cum $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}=c-a\neq 0$ atunci $\operatorname{rang} A=2$. Fie $x=\alpha$ și sistemul $\begin{cases} y+z=-\alpha \\ ay+cz=-a\alpha \end{cases}\Big|^{\cdot(-a)}$; $\begin{cases} -ay-az=a\alpha \\ ay+cz=-a\alpha \end{cases}$, de unde $z(c-a)=0$. Rezultă $z=0$ $(c-a\neq 0)$ și $y=-\alpha$. Obținem $x=\alpha$; $y=-\alpha$; $z=0$.

2. a) $9^2-5\cdot 4^2=1$ și $9,4\in\mathbb{Z}$, deci $x\in M$.

b) $\forall z_1,z_2\in M$, $z_1\cdot z_2\in M$; $\forall z_1,z_2\in M$, $z_1^{-1}\in M$.

c) Se consideră $z=9+4\sqrt{5}\in M$; $\forall k,n\in\mathbb{N}^*$, cu $n\neq k$, avem $z^n\neq z^k$, unde $z^n,z^k\in M$. Deci M are o infinitate de elemente.

VARIANTA 40

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=I_3+A$, $C=I_3+aA$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $S=A-XY$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $BC=I_3$.

5p **c)** Să se arate că $A^{n+1}=14A^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-1\in\mathbb{R}[X]$ și numărul $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon)=0$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y\varepsilon+z\varepsilon^2=0 \\ x+y\varepsilon^2+z\varepsilon=0 \end{cases}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă f divide $f_1(X^3)+Xf_2(X^3)+X^2f_3(X^3)$, unde f_1,f_2,f_3 sunt polinoame cu coeficienți complecși, atunci fiecare dintre polinoamele f_1,f_2,f_3 este divizibil cu $X-1$.

Soluții

1. a) $X\cdot Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}=A$. Rezultă că $S=A-A=O_3$.

b) $BC=I_3+aA+A+aA^2=I_3+(a+1)A+aA^2$. Obținem $A^2=14\cdot A$; deci $B\cdot C=I_3+(15a+1)\cdot A$. Rezultă $a=-\frac{1}{15}$.

c) Vom demonstra prin inducție matematică.

Fie $P(n)$: $A^{n+1}=14\cdot A^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

I $P(1)$: $A^2=14A$, adevărată din **b)**.

II Presupunem $P(n)$ adevărată și arătăm că și $P(n+1)$ este adevărată.

$P(n+1)$: $A^{n+2}=14\cdot A^{n+1}$

$A^{n+2}=A^{n+1}\cdot A=14A^n\cdot A=14A^{n+1}$.

2. a) $0=\varepsilon^3-1=(\varepsilon-1)(\varepsilon^2+\varepsilon+1)$. Cum $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, deducem că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$.

b) Determinantul sistemului este $\Delta=-\varepsilon(\varepsilon+2)(\varepsilon-1)^2$; $\Delta\neq 0$, deci sistemul are doar soluția nulă $x=y=z=0$.

c) Din ipoteză, există $g \in \mathbb{C}[X]$, astfel încât
$f_1(X^3)+Xf_2(X^3)+X^2f_3(X^3)=(X^3-1)\cdot g(X)$.
Numerele 1, ε şi ε^2 sunt rădăcinile polinomului X^3-1. Se obţine sistemul
$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=0 \\ a_1+a_2\cdot\varepsilon+a_3\cdot\varepsilon^2=0 \\ a_1+a_2\cdot\varepsilon^2+a_3\cdot\varepsilon=0 \end{cases}$, unde $a_k=f_k(1)$, $\forall k\in\{1,2,3\}$. Folosind punctul **b)** se deduce că $f_k(1)=0$, $\forall k\in\{1,2,3\}$, de unde rezultă concluzia.

VARIANTA 41

1. Pentru $p,q,r\in\mathbb{C}$, se consideră sistemul $\begin{cases} x+py+p^2z=p^3 \\ x+qy+q^2z=q^3 \\ x+ry+r^2z=r^3 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(p-q)(q-r)(r-p)$.

5p **b)** Dacă p, q, r sunt distincte, să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se arate că, dacă sistemul are soluţia $(-1,1,1)$, atunci cel puţin două dintre numerele p, q, r sunt egale.

2. Se consideră inelul $(A,+,\cdot)$ unde $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

5p **b)** Să se rezolve în mulţimea A ecuaţia $X^2=I_2$.

5p **c)** Să se arate că $(A,+,\cdot)$ nu este corp.

Soluţii

1. a) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & p & p^2 \\ 0 & q-p & q^2-p^2 \\ 0 & r-p & r^2-p^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} q-p & q^2-p^2 \\ r-p & r^2-p^2 \end{vmatrix}=(p-q)(q-r)(r-p)$.

b) Deoarece $\Delta\neq 0$, sistemul se poate rezolva cu ajutorul regulii lui Cramer, obţinându-se soluţia: $\begin{cases} x=pqr \\ y=-pq-pr-qr \\ z=p+q+r \end{cases}$.

c) $(-1, 1, 1)$ soluţie a sistemului, atunci $p^3-p^2-p+1=0$, $q^3-q^2-q+1=0$ şi $r^3-r^2-r+1=0$, adică p, q, r verifică ecuaţia $t^3-t^2-t+1=0$. Obţinem $t^2(t-1)-(t-1)=0$, adică $(t-1)(t-1)(t+1)=0$ cu rădăcinile $t_1=t_2=1$ şi $t_3=-1$. Deci oricum le-am alege, două dintre numerele p, q, r vor fi egale cu 1.

2. a) Deoarece a şi b pot lua câte 5 valori, atunci A are 25 de elemente.

b) Dacă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ atunci $X^2=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a^2-b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ dacă şi numai dacă $a^2-b^2=\hat{1}$ şi $ab=\hat{0}$. Dacă $a=\hat{0}\Rightarrow b^2=\hat{4}\Rightarrow b\in\{\hat{2},\hat{3}\}$. Dacă $b=\hat{0}\Rightarrow a^2=\hat{1}$, deci $a\in\{\hat{1},\hat{4}\}$. Obţinem matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$.

c) Matricea $Y=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}\neq O_2$ are determinantul $\hat{0}$, deci nu e inversabilă.

VARIANTA 42

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $AB - BA = A$ şi matricele $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A_0.

5p **b)** Să se arate că $A_0B_0 - B_0A_0 = A_0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^nB - BA^n = nA^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.

5p **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $X^2 - 1$.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluția $x = i \in \mathbb{C}$.

5p **c)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică şi, în plus, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

Soluții

1. a) $\det A_0 = 0$, atunci $\operatorname{rang} A \leqslant 1$. Cum A_0 conține un element nenul, atunci $\operatorname{rang} A_0 = 1$.

b) $A_0B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci $A_0B_0 - B_0A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_0$.

c) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $C_n \overset{not}{=} A^nB - BA^n = A^{n-1}(AB - BA) +$

$+ (A^{n-1}B - BA^{n-1})A \overset{ip}{=} A^{n-1} \cdot A + C_{n-1} \cdot A = A^n + C_{n-1} \cdot A$.

Analog, $C_{n-1} = A^{n-1} + C_{n-2} \cdot A$.

Deci $C_n = A^n + A^{n-1} \cdot A + C_{n-2} \cdot A \cdot A = 2A^n + C_{n-2} \cdot A^2 = \ldots$

$= (n-1)A^n + C_1 \cdot A^{n-1} = (n-1)A^n + (AB - BA)A^{n-1} \overset{(ip)}{=} n \cdot A^n$.

2. a) $f(-1) = f(1) = 0$. Avem $b - a = 16$ şi $a + b = 8$; obținem $a = -4$ şi $b = 12$.

b) Deoarece ecuația are coeficienți reali, dacă admite rădăcina $x_1 = i$, va avea şi rădăcina $x_2 = -i$. Polinomul f se divide cu $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$. Rezultă $a = 4$ şi $b = -12$.

c) Rădăcinile x_1, x_2, x_3 sunt în progresie aritmetică, deci există $z, r \in \mathbb{C}$ astfel încât $x_1 = z - r$, $x_2 = z$ şi $x_3 = z + r$. Se obține $x_1 + x_2 + x_3 = 3z = 3$, deci $z = 1$.

Din $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1-r)^2 + 1 + (1+r)^2 = 11$, rezultă că rădăcinile sunt $-1, 1, 3$.

Înlocuind în f obținem $a = -4$ şi $b = 12$.

VARIANTA 43

1. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{N} \right\}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M$.

5p **a)** Câte matrice din mulțimea M au suma elementelor egală cu 1?

5p **b)** Să se arate că $A^{-1} \notin M$.

5p **c)** Să se determine toate matricele inversabile $B \in M$ care au proprietatea $B^{-1} \in M$.

2. Se consideră ecuația $x^4 - 8x^3 + ax^2 + 8x + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se arate că $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 + (x_1 + x_4)x_2x_3 + (x_2 + x_3)x_1x_4 = a - 8$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

5p **c)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât x_1, x_2, x_3, x_4 să fie în progresie aritmetică.

Soluții

1. a) $a + b + c + d = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, atunci unul dintre elemente va fi 1 iar celelalte trei vor fi 0, în total 4 combinații, deci 4 matrice.

b) $\det(A) = 1 \neq 0$, deci A este inversabilă. Obținem $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin M$ deoarece -1 şi $-2 \notin \mathbb{N}$.

c) Fie $B \in M$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversabilă astfel încât $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M$;

$B \cdot B^{-1} = I_2$, adică $\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$. Deoarece $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, se obțin soluțiile

$B_1 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Din relațiile lui Viète, $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = a$ şi $S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -8$;

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3$ şi

$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = (x_1 + x_4)x_2x_3 + (x_2 + x_3)x_1x_4$, deci $S_2 + S_3 = a - 8$.

b) $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 4$.

Folosind a treia relație a lui Viète, se obține $x_1x_4 + x_2x_3 = -2$.

Din a doua relație a lui Viète, rezultă $a = 14$.

c) x_1, x_2, x_3, x_4 sunt în progresie aritmetică, deci există $z, r \in \mathbb{C}$, astfel încât $x_1 = z - 3r$, $x_2 = z - r$, $x_3 = z + r$ și $x_4 = z + 3r$;

$x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 4$, deci $z = 2$ și din b) rezultă $a = 14$.

Din $x_1x_4 + x_2x_3 = -2$, rezultă $r^2 = 1$, deci $b = -15$.

VARIANTA 44

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $AB + BA$.

5p **b)** Să se arate că $\operatorname{rang}(A + B) = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(A + B)^n = A^n + B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + 4X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât polinomul f să se dividă cu $X + 1$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $g = X^4 + 4X^2 + aX + 1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{C}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Soluții

1. a) $AB = O_4$; $BA = O_4$. Atunci $AB + BA = O_4$.

b) $\operatorname{rang} A = 1$; $\operatorname{rang} B = 1$; $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(A + B) = 0$, deci $\operatorname{rang}(A + B) \leqslant 3$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, deci $\operatorname{rang}(A + B) \geqslant 2$.

Deoarece toți cei patru minori de ordin 3 obținuți prin bordarea minorului $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ sunt nuli, deducem că $\operatorname{rang}(A + B) = 2$. Deci $\operatorname{rang}(A + B) = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$.

c) $(A + B)^n = C_n^0 A^n B^0 + C_n^1 A^{n-1} B^1 + \ldots + C_n^n A^0 B^n$. Cum $AB = BA = O_4$, atunci $(A + B)^n = A^n + B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) $(x + 1) | f$, atunci $f(-1) = 0$, adică $1 - a + 4 + 1 = 0$, de unde $a = 6$.

b) $g\left(\frac{1}{x_1}\right)=\frac{1}{x_1^4}+4\cdot\frac{1}{x_1^2}+a\cdot\frac{1}{x_1}+1 \;\Big|\cdot x_1^4;\quad x_1^4\cdot g\left(\frac{1}{x_1}\right)=1+4x_1^2+ax_1^3+x_1^4=0$, deoarece x_1 este rădăcină pentru f. Deci $g\left(\frac{1}{x_1}\right)=0$, adică $\frac{1}{x_1}$ rădăcină pentru g. Analog $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$ și $\frac{1}{x_4}$ rădăcini pentru g.

c) Conform relațiilor lui Viète $S_1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=0$ și $S_2=\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\ldots+\frac{1}{x_3x_4}=4$. Atunci $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=S_1^2-2S_2=0-8=-8<0$, de unde rezultă că nu toate rădăcinile x_i, $i=\overline{1,4}$ sunt reale.

VARIANTA 45

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\,XA=AX\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $B\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $x, y\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}x&0\\y&x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X+X^2=A$.

2. Se consideră mulțimea $G=(-1,1)$, funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ și corespondența $(x,y)\to x*y$, unde $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x,y\in G$.

5p **a)** Să se arate că această corespondență definește o lege de compoziție pe G.

5p **b)** Să se arate că $\forall x,y\in G$, $f(x*y)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Știind că operația "$*$" este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{9}$.

Soluții

1. a) $AB=\begin{pmatrix}2&0\\5&2\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}2&0\\5&2\end{pmatrix}$. Deci $B\in C(A)$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix}x&z\\y&t\end{pmatrix}$. Atunci $XA=\begin{pmatrix}2x+3z&2z\\2y+3t&2t\end{pmatrix}$ și $AX=\begin{pmatrix}2x&2z\\3x+2y&3z+2t\end{pmatrix}$.

Se observă imediat că egalitatea $XA=AX$ impune $x=t$, $z=0$, adică $X=\begin{pmatrix}x&0\\y&x\end{pmatrix}$.

c) $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$; $X^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{pmatrix}$. Din $X^2+X=A$ obținem

$$\begin{cases}a^2+bc+a=2 & (1)\\ b(a+d+1)=0 & (2)\\ c(a+d+1)=3 & (3)\\ bc+d^2+d=2 & (4)\end{cases}$$

Din (2) și (3) rezultă $b=0$.

Din (1) și (4) obținem $a_1=1$, $a_2=-2$, respectiv $d_1=1$, $d_2=-2$.

Din $a=d=1$ și (3) obținem $c=1$.

Din $a=d=-2$ și (3) obținem $c=-1$.

Dacă $a=1$ și $d=-2$ sau $a=-2$ și $d=1$, atunci $a+d+1=0$ și contrazice (3).

Deci $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sau $X=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

2. a) Trebuie arătat că pentru $x\in(-1,1)$, $y\in(-1,1)$, avem că și $x*y\in(-1,1)$, ceea ce este echivalent cu: $-1<\dfrac{x+y}{1+xy}<1$.

Deoarece $1+xy<0$, inegalitățile de mai sus sunt echivalente cu $\begin{cases}(x+1)(y+1)>0\\ (x-1)(y-1)>0\end{cases}$.

b) $f(x*y)=\dfrac{1-x*y}{1+x*y}=\dfrac{1+xy-(x+y)}{1+xy+x+y}=\dfrac{1+xy-x-y}{(x+1)(y+1)}=\dfrac{(1-y)(1-x)}{(x+1)(y+1)}=f(x)\cdot f(y)$.

c) $f\left(\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*\ldots*\dfrac{1}{9}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{8}{10}=\dfrac{1}{45}$; $f^{-1}=f$;

$\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*\ldots*\dfrac{1}{9}=f^{-1}\left(\dfrac{1}{45}\right)=f\left(\dfrac{1}{45}\right)=\dfrac{44}{46}=\dfrac{22}{23}$.

VARIANTA 46

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall x\in\mathbb{R}$, $\det(A-xI_2)=x^2-(a+d)x+ad-bc$.

5p **b)** Dacă $A^2=O_2$, să se demonstreze că $a+d=0$.

5p **c)** Știind că $A^2=O_2$, să se calculeze $\det(A+2I_2)$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,\middle|\,a^2-3b^2=1\right\}$ și operația $(a,b)*(c,d)=(ac+3bd,ad+bc)$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $(a,15)\in G$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $(a,b),(c,d)\in G$, rezultă că $(a,b)*(c,d)\in G$.

5p **c)** Să se arate că $(G,*)$ este grup.

Soluții

1. a) $\det(A-xI_2)=\left|\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}a-x & b\\ c & d-x\end{vmatrix}=(a-x)(d-x)-bc=$

$=x^2-(a+d)x+(ad-bc)$.

b) Din $A^2=O_2$ se obține sistemul format din $a^2+bc=0$, $b(a+d)=0$, $c(a+d)=0$, $d^2+bc=0$, iar din prima și ultima ecuație obținem $(a-d)(a+d)=0$. Presupunem că $a+d\neq0$. Rezultă $b=c=0$ și $a=d$. Din prima ecuație din sistem rezultă $a=d=0$, deci $a+d=0$, contradicție.

c) Din **b)** știm că $a+d=0$.

Din $A^2=O_2$, rezultă că $\det A^2=\det O_2=0$; $(\det A)^2=0$; $\det A=0$, de unde $ad-bc=0$.

Din **a)** rezultă că $\det(A-xI_2)=x^2$.

Pentru $x=-2$, obținem $\det(A+2I_2)=4$.

2. a) $(a,15)\in G$, rezultă $a^2-675=1$, adică $a^2=676$, de unde $a=\pm26$.

b) Pentru $(a,b),(c,d)\in G$, avem $ac+3bd$, $ad+bc\in\mathbb{Z}$ și $(ac+3bd)^2-3(ad+bc)^2=(a^2-3b^2)(c^2-3d^2)=1$, deci $(a,b)*(c,d)\in G$.

c) Se demonstrează asociativitatea. Elementul neutru este $(1,0)\in G$; $\forall(a,b)\in G$, simetricul acestuia este $(a,-b)\in G$.

VARIANTA 47

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX-XA$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se calculeze $f(B)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $f(X)=B$ nu are soluții.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+a^2X-a$, $g=aX^3-a^2X^2-1$, cu $a\in\mathbb{R}^*$ și $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f.

5p **a)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Să se arate că rădăcinile polinomului g sunt inversele rădăcinilor polinomului f.

5p **c)** Să se arate că polinoamele f și g nu au rădăcini reale comune.

Soluții

1. a) $\det A=4-6=-2\neq 0$ rezultă că $\operatorname{rang} A=2$.

b) $AB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $f(B)=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

c) Dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $f(X)=B$, vom avea $\operatorname{tr}(AX-XA)=\operatorname{tr}(B)$, de unde $0=2$ fals.

2. a) $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a^2$;

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-2a^2$.

b) x_1 este o rădăcină a polinomului f, deci $f(x_1)=0$, adică $x_1^3+a^2x_1-a=0$. Împărțind prin $x_1^3\neq 0$ obținem $1+\frac{a^2}{x_1^2}-\frac{a}{x_1^3}=0$, de unde $\frac{1}{x_1}$ este o rădăcină a polinomului g. Analog $\frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$.

c) Fie $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$ rădăcinile polinomului g. Deoarece $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2a^2<0$, rezultă că f are o singură rădăcină reală, de exemplu x_1. Atunci, $\frac{1}{x_1}\in\mathbb{R}$ este unica rădăcină reală a lui g. Presupunem că $x_1=\frac{1}{x_1}$, deci că $x_1\in\{-1,1\}$. Dacă $x_1=-1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(-1)=0$ deducem $a^2+a+1=0$, fals. Dacă $x_1=1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(1)=0$ deducem $a^2-a+1=0$, fals.

VARIANTA 48

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x+2y+z=1\\ 2x-y+z=1\\ 7x-y+az=b\end{cases}$, unde a și b sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.

5p **b)** Să se determine valorile parametrilor $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate există o infinitate de valori ale numerelor a și b pentru care sistemul admite o soluție (x,y,z), cu x,y,z în progresie aritmetică.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{X(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $X(t)\cdot X(u)=X(t+u)$, $\forall t,u\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine $t\in\mathbb{R}$ știind că $X(t)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea G formează grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

Soluții

1. a) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & a\end{vmatrix}=-5a+20$; $\Delta=0$ dacă $a=4$.

b) Dacă $\Delta\neq 0$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil. Pentru $\Delta=0$, deci pentru $a=4$, un minor principal este $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}$.

Sistemul este incompatibil dacă și numai dacă $\Delta_c=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & b\end{vmatrix}\neq 0$, adică $b\neq 4$.

c) Scăzând primele două ecuații obținem $x-3y=0$, adică $x=3y$, iar din prima ecuație $z=1-x-2y=1-5y$. Cum x,y,z sunt în progresie aritmetică, avem $x+z=2y$, adică $3y+1-5y=2y$, $4y=1$, $y=\frac{1}{4}$. Atunci $x=\frac{3}{4}$ și $z=1-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}$. Înlocuind x,y,z în ultima ecuație obținem $\frac{21}{4}-\frac{1}{4}-\frac{a}{4}=b$, adică $a+4b=20$, ecuație ce are o infinitate de soluții.

2. a) $X(t)\cdot X(u)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos u & \sin u\\ -\sin u & \cos u\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\cos t\cos u-\sin t\sin u & \cos t\sin u+\sin t\cos u\\ -\sin t\cos u-\cos t\sin u & -\sin t\sin u+\cos t\cos u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(t+u) & \sin(t+u)\\ -\sin(t+u) & \cos(t+u)\end{pmatrix}=$

$=X(t+u)$.

b) Din $\sin t\in\mathbb{Z}$, $\cos t\in\mathbb{Z}$ şi $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ obţinem că $\sin t=0$ şi $\cos t=\pm 1$ sau $\sin t=\pm 1$ şi $\cos t=0$. Deci $t=k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

c) Asociativitatea. Folosim **b)**.

$[X(t)\cdot X(u)]\cdot X(w)=X(t+u)\cdot X(w)=X(t+u+w)$;

$X(t)\cdot[X(u)\cdot X(w)]=X(t)\cdot X(u+w)=X(t+u+w)$.

Element neutru.

$X(t)\cdot X(e)=X(t)$; $X(t+e)=X(t)$, de unde $t+e=t$, adică $e=0$ şi

$X(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

Elemente simetrizabile.

$X(t)\cdot X(t')=X(0)$, adică $X(t+t')=X(0)$; $t+t'=0$; $t'=-t$ şi

$X(-t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$.

Comutativitatea.

$X(t)\cdot X(u)=X(t+u)$; $X(u)\cdot X(t)=X(u+t)$.

Deci G formează un grup abelian în raport cu înmulţirea matricelor.

VARIANTA 49

1. Se consideră $a\in\mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases}x+ay=1\\ y+az=a\\ x+z=1\end{cases}$ şi A matricea sa.

5p **a)** Să se arate că $\det A\neq 0$.

5p **b)** Să se arate că soluţia sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

5p **c)** Să se determine inversa matricei A.

2. Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie dată de relaţia $x*y=xy-5x-5y+30$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ şi mulţimea $G=(5,\infty)$.

5p **a)** Să se arate că legea "$*$" are element neutru.

5p **b)** Să se demonstreze că G este grup abelian în raport cu legea "$*$".

5p **c)** Să se rezolve în grupul $(G,*)$ sistemul $\begin{cases}x*y=z\\ y*z=x\\ z*x=y\end{cases}$.

Soluţii

1. a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{c_3-c_1}{=}\begin{vmatrix}1 & a & -1\\ 0 & 1 & a\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & -1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a^2+1>0$, $\forall a\in\mathbb{R}$ deci $\det A\neq 0$.

b) Cum $\det A\neq 0$ atunci soluţia sistemului se obţine cu formulele lui Cramer.

$\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{c_3-c_1}{=}\begin{vmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1$; $\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & a & a\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & a\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=a$;

$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{c_3-c_1}{=}\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=a^2$.

Atunci $x=\frac{\Delta_x}{\det A}=\frac{1}{a^2+1}$, $y=\frac{a}{a^2+1}$, $z=\frac{a^2}{a^2+1}$.

Avem $y^2=\frac{a^2}{(a^2+1)^2}=\frac{1}{a^2+1}\cdot\frac{a^2}{a^2+1}=x\cdot z$.

Deci x, y, z sunt în progresie geometrică.

c) $\det A\neq 0$, atunci A inversabilă.

$A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\a&1&0\\0&a&1\end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix}1&-a&a^2\\a&1&-a\\-1&a&1\end{pmatrix}$.

Atunci $A^{-1}=\dfrac{A^*}{\det A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2+1}&\frac{-a}{a^2+1}&\frac{a^2}{a^2+1}\\\frac{a}{a^2+1}&\frac{1}{a^2+1}&\frac{-a}{a^2+1}\\\frac{-1}{a^2+1}&\frac{a}{a^2+1}&\frac{1}{a^2+1}\end{pmatrix}$.

2. a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $xe-5x-5e+30=ex-5e-5x+30=x$. Se obține $e=6$.

b) $\forall x,y\in G$, $x*y=(x-5)(y-5)+5\in G$. Se verifică axiomele grupului comutativ:

- asociativitate: $(x*y)*z=x*(y*z)=(x-5)(y-5)(z-5)+5$, $\forall x,y,z\in G$;
- comutativitate: $x*y=(x-5)(y-5)+5=(y-5)(x-5)+5=y*x$, $\forall x,y\in G$;
- element neutru: din punctul a), $e=6$;
- elemente simetrizabile:

$x*x'=x'*x=e$, $\forall x\in G$, $(x-5)(x'-5)+5=6$; $x'=\dfrac{5x-24}{x-5}\in G$.

Deci $(G,*)$ este grup abelian.

c) Notăm $\begin{cases}x-5=a>0\\y-5=b>0\\z-5=c>0\end{cases}$ și obținem sistemul $\begin{cases}ab=c\\bc=a\\ca=b\end{cases}$. Se obține unica soluție $a=b=c=1$. Singura soluție a sistemului inițial este $x=y=z=6$.

VARIANTA 50

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, transpusa $A^t\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B=AA^t$, și punctele $P_k(a_k,b_k)$, unde $k\in\{1,2,3\}$.

5p **a)** Să se calculeze B știind că $P_1(1,2)$, $P_2(2,4)$, $P_3(-3,-6)$.

5p **b)** Să se arate că $\det(B)\geq 0$, oricare ar fi punctele P_1, P_2, P_3.

5p **c)** Să se arate că $\det(B)=0$ dacă și numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1}&a&b\\\hat{0}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că $AB\in M$, pentru orice $A,B\in M$.

5p **c)** Să se arate că $(M,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

Soluții

1. a) $A^t=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}a_1^2+a_2^2+a_3^2&a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&b_1^2+b_2^2+b_3^2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}14&28\\28&56\end{pmatrix}$.

b) $\det(B)=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$; prin calcul obținem că

$\det(B)=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}^2\geq 0$.

c) Punctele P_1, P_2, P_3, O sunt coliniare $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_k&a_t\\b_k&b_t\end{vmatrix}=0$, $\forall k,t\in\{1,2,3\}$.

Din punctul b) rezultă că $\det(B)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_k&a_t\\b_k&b_t\end{vmatrix}=0$, $\forall t,k\in\{1,2,3\}$, $t\neq k$, de aici și concluzia.

2. a) $a,b\in\mathbb{Z}_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$. Adică fiecare poate lua câte 5 valori. Atunci mulțimea M va avea $5\cdot 5=25$ elemente.

b) Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{a}&\hat{b}\\\hat{0}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}\in M$, $B=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{a'}&\hat{b'}\\\hat{0}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}\in M$.

Obținem $A\cdot B=\begin{pmatrix}\hat{1} & \widehat{a+a'} & \widehat{b+b'}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

Cum $\hat{a},\hat{b},\hat{a'},\hat{b'}\in\mathbb{Z}_5 \Rightarrow \widehat{a+a'},\widehat{b+b'}\in\mathbb{Z}_5 \Rightarrow A\cdot B\in M$.

c) Se demonstrează faptul că $(M,\cdot)$ este un grup. Asociativitatea rezultă din proprietățile înmulțirii matricelor. Elementul neutru este $I_3=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

Elemente simetrizabile: $\forall A\in M$, avem $A'=\begin{pmatrix}\hat{1} & -\hat{a} & -\hat{b}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in M$.

VARIANTA 51

1. Fie șirul $(F_n)_{n\geq 0}$, dat de $F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\forall n\in\mathbb{N}^*$, $F_0=0, F_1=1$ și matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^2=A+I_2$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X\in M_2(\mathbb{Q})$, $X\neq O_2$ și $AX=XA$, atunci X este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că $A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix},\forall n\geq 1$.

2. Fie $\sigma,\pi\in S_5$, $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\sigma\pi\neq\pi\sigma$.

5p **b)** Să se determine numărul elementelor mulțimii $H=\{\pi^n\mid n\in\mathbb{N}^*\}$.

5p **c)** Să se arate că $H=\{\pi^n\mid n\in\mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului $(S_5,\cdot)$.

Soluții

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A+I_2$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), a,b,c,d\in\mathbb{Q}^*$.

$AX=XA\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & a\\ c+d & c\end{pmatrix}$.

Avem $a+c=a+b, b+d=a, a=c+d, b=c$. Obținem $b=c$ și $a=b+d$ (1).

$\det X=ad-bc=ad-b^2\overset{(1)}{\Rightarrow}\det X=(b+d)d-b^2=bd+d^2-b^2=\left(d+\frac{1}{2}b\right)^2-\frac{5}{4}b^2$.

Presupunem $\det X=0$, deci $\left(d+\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{5}}{2}b\right)\left(d+\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{5}}{2}b\right)=0$.

I. $d+\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{5}}{2}b=0\Rightarrow 2d+b-\sqrt{5}b=0$, deci $\sqrt{5}b=2d+b$.

Presupunem $b\neq 0$, deci $\sqrt{5}=\frac{2d+b}{b}\in\mathbb{Q}$, fals. Rezultă $b=0$ și $d=0\overset{(1)}{\Rightarrow}a=0$ și $c=0$, fals.

II. $d+\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{5}}{2}b=0\Rightarrow 2d+b+\sqrt{5}b=0$, deci $\sqrt{5}b=-(2d+b)$.

Presupunem $b \neq 0$, deci $\sqrt{5} = -\frac{2d+b}{b} \in \mathbb{Q}$ fals. Rezultă $b = 0$ şi $d = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = c = 0$ fals.

Rezultă $\det X \neq 0$, deci X este inversabilă.

c) Din relaţia $A^2 - A - I_2 = O_2$ rezultă $A^{n+1} = A^n + A^{n-1}$. Verificăm că:

$A = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix}$; presupunem egalitatea adevărată pentru A^n şi A^{n-1}

şi obţinem: $A^{n+1} = A^n + A^{n-1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$, deci demonstraţia prin inducţie matematică este încheiată.

2.a) $\sigma \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Deci $\sigma \cdot \pi \neq \pi \cdot \sigma$.

b) $\pi^1 = \pi$; $\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\pi^3 = \pi^2 \cdot \pi = e$. Deci $\text{ord}(\pi) = 3$, de unde

$H = \{e; \pi; \pi^2\}$.

c) Deoarece $H = \{e, \pi, \pi^2\}$ este stabilă în raport cu operaţia de compunere a permutărilor şi fiecare din permutările π şi π^2 reprezintă inversa celeilalte, deducem că H este subgrup al lui S_5.

VARIANTA 52

1. Se consideră permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine σ^{-1}.

5p **b)** Să se arate că permutările σ şi σ^{-1} au acelaşi număr de inversiuni.

5p **c)** Să se arate că ecuaţia $x^4 = \sigma$ nu are soluţii în grupul $(S_6, \cdot)$.

2. Fie legea de compoziţie „$\circ$”, definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = xy - x - y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

5p **a)** Să se arate că $(1, \infty)$ este parte stabilă în raport cu „$\circ$”.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea „$\circ$” este asociativă, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 10 ori } x} = 1025$.

Soluţii

1. a) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $m(\sigma) = 7$; $m(\sigma^{-1}) = 7$.

c) $\varepsilon(\sigma) = -1$. Dacă ar exista o soluţie x, atunci $\varepsilon(x^4) = \varepsilon(\sigma)$ sau $1 = -1$, contradicţie.

2. a) $\left.\begin{matrix} x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \\ y > 1 \Rightarrow y - 1 > 0 \end{matrix}\right\} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} xy - x - y + 1 > 0 \,|+1$. Atunci $xy - x - y + 2 > 1$, de unde

$(1, \infty)$ este parte stabilă în raport cu „$\circ$”.

b) $f(xy) = xy + 1$; $f(x) \circ f(y) = (x+1) \circ (y+1) = (x+1)(y+1) - (x+1) - (y+1) + 2 =$

$= xy + x + y + 1 - x - 1 - y - 1 + 2 = xy + 1$.

Rezultă că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

c) $x \circ x = x^2 - x - x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$. Vom demonstra prin inducţie că

$\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n+1 \text{ ori}} = (x-1)^{n+1} + 1$.

Etapa de verificare a fost parcursă. Etapa de demonstraţie: $p(k) \to p(k+1)$

$p(k)$: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{k \text{ ori}} = (x-1)^k + 1$; $p(k+1)$: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{k+1 \text{ ori}} = (x-1)^{k+1} + 1$.

$\left[(x-1)^k + 1\right] \circ x = \left[(x-1)^k + 1\right] x - (x-1)^k - 1 - x + 2 = (x-1)^k x + x - (x-1)^k - x + 1 =$

$= (x-1)^k (x-1) + 1 = (x-1)^{k+1} + 1$.

Deci $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{10 \text{ ori}} = (x-1)^{10} + 1$, din $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{10 \text{ ori}} = 1025$, adică $(x-1)^{10} = 1024$,

$(x-1)^{10} = 2^{10}$, $|x-1| = 2$. Rezultă $x = 3$ sau $x = -1$.

VARIANTA 53

1. Pentru orice matrice $A\in M_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mid AX=XA\}$.

Se consideră matricele $E_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in C(A)$, atunci $X+Y\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $E_1,E_2\in C(A)$, atunci există $\alpha\in\mathbb{C}$ astfel încât $A=\alpha I_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $C(A)$ conține trei dintre matricele E_1,E_2,E_3,E_4, atunci o conține și pe a patra.

2. Fie $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în S_5 ecuația $ax=b$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului ab în grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **c)** Fie $k\in\mathbb{Z}$ cu $b^k=e$. Să se arate că 6 divide k.

Soluții

1. a) Dacă $X,Y\in C(A)$ avem $AX=XA, AY=YA$,

$A(X+Y)=AX+AY=XA+YA=(X+Y)A$, deci $X+Y\in C(A)$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$; $E_1A=AE_1$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, rezultă $\begin{cases}c=0\\d=a\end{cases}$;

$E_2A=AE_2$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, rezultă $b=0$, deci $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}=aI_2$.

c) Dacă $E_1,E_2\in C(A)$, atunci, din punctul **b)** avem $A=aI_2$.

$E_3(aI_2)=(aI_2)E_3$ și $E_4(aI_2)=(aI_2)E_4$, deci $E_3,E_4\in C(A)$. Dacă $E_1,E_3,E_4\in C(A)$, atunci $\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$, deci $b=0$ și imediat $E_2\in C(A)$.

Dacă $E_2,E_3,E_4\in C(A)$, atunci $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, avem $\begin{cases}b=0\\a=d\end{cases}$;

$\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}$, avem $c=0$ și imediat $E_1\in C(A)$.

2. a) $x=a^{-1}b$, deci $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$.

b) $ab=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$. Deoarece $(ab)^5=e$ avem $\text{ord}(ab)=5$.

c) $b^6=e$, deci $\text{ord}(b)=6$.

$b^k=e$, implică $6\mid k$.

VARIANTA 54

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $AB\neq BA$.

5p **b)** Să se arate că $A^4+B^6=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $(AB)^n\neq I_2$.

2. Se consideră șirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F_0=0, F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, \forall n\geqslant 1$ și polinoamele $P,Q_n\in\mathbb{Z}[X], P=X^2-X-1, Q_n=X^n-F_nX-F_{n-1}, \forall n\geqslant 2$.

5p **a)** Să se arate că polinomul X^3-2X-1 este divizibil cu P.

5p **b)** Să se determine rădăcinile reale ale polinomului Q_3.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\geqslant 2$, polinomul Q_n este divizibil cu P.

Soluții

1. a) $AB=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, deci $AB\neq BA$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-1\cdot I_2$, deci $A^4=A^2\cdot A^2=I_2$.

$B^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $B^4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $B^6=I_2$, deci $A^4+B^6=2I_2$.

c) $(AB)^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$, $(AB)^3=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$. Se demonstrează prin inducție matematică că $(AB)^n=\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}$ și cum $n\neq 0$ rezultă că $(AB)^n\neq I_2$.

2. a) $X^3-2X-1=(X^2-X-1)(X+1)$, deci $(X^3-2X-1)\vdots(X^2-X-1)$.

b) $Q_3=X^3-F_3X-F_2$, $F_2=1$, $F_3=2$, deci $Q_3=X^3-2X-1$.

Rezultă $x_1=-1, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) Termenul general al șirului lui Fibonacci este $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n}-\frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right]$. Dacă notăm $(1+\sqrt{5})^n=a+b\sqrt{5}$, cu $a,b\in\mathbb{N}$ avem $(1-\sqrt{5})^n=a-b\sqrt{5}$.

Calculăm și obținem $Q_n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$ și cum $Q_n\in\mathbb{Q}[X]$ rezultă că și $Q_n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$, deci $Q_n\vdots(X^2-X-1)$.

VARIANTA 55

1. Matricea $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=(a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2), \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a^2+b^2\le 1$, atunci șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a=1$ și $b=\sqrt{3}$, atunci $x_{n+6}=64x_n$, $\forall n\ge 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_{11},+,\cdot)$.

5p **a)** Să se arate că ecuația $x^2=\hat{8}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}$.

5p **b)** Să se determine numărul polinoamelor de grad doi din $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

5p **c)** Să se arate că polinomul $X^2+X+\hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

Soluții

1. a) Din $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_n-by_n \\ bx_n+ay_n \end{pmatrix}$ obținem

$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=a^2x_n^2-2abx_ny_n+b^2x_n^2+b^2y_n^2+2abx_ny_n+a^2y_n^2=(a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)$.

b) $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=(a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)\le x_n^2+y_n^2$. Șirul $z_n=x_n^2+y_n^2$ este descrescător și mai mare sau egal cu 0, deci z_n este mărginit, adică $(\exists)M>0$ astfel încât $z_n<M$.

Rezultă că x_n, y_n sunt mărginite.

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$.

Avem $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de unde $x_n=2^n\cdot\left(x_0\cos\frac{n\pi}{3}-y_0\sin\frac{n\pi}{3}\right)$ și

$x_{n+6}=2^{n+6}\cdot\left(x_0\cos\frac{n\pi+6\pi}{3}-y_0\sin\frac{n\pi+6\pi}{3}\right)=64\cdot 2^n\left(x_0\cos\frac{n\pi}{3}-y_0\sin\frac{n\pi}{3}\right)=64x_n$.

2. a) $\hat{1}^2=\widehat{10}^2=\hat{1}^2$, $\hat{2}^2=\hat{9}^2=\hat{4}$, $\hat{3}^2=\hat{8}^2=\hat{9}$, $\hat{4}^2=\hat{7}^2=\hat{5}$, $\hat{5}^2=\hat{6}^2=\hat{3}$, rezultă că ecuația nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}$.

b) $10\cdot 11^2=1210$.

c) Dacă polinomul are o soluție $a\in\mathbb{Z}_{11}$, atunci $a^2+a+\hat{1}=\hat{0}$, deci $(\hat{2}a+\hat{1})^2=\hat{8}$, fals. Deoarece polinomul dat este de gradul doi și nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_{11}$, obținem concluzia.

VARIANTA 56

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X)=AX$.

5p **a)** Să se arate că $f(A)=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $f(X+f(X))=X+f(X), \forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,AX=XA\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in M$, atunci $XY\in M$.

5p **b)** Să se arate că $G=\{X\in M\,|\,\det X\neq 0\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine elementele de ordin doi din grupul G, definit la punctul **b)**.

Soluții

1. a) $f(A)=A^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$.

b) Avem succesiv: $f(X+f(X))=A\cdot(X+AX)=AX+A^2X=AX+X=X+AX=$
$=X+f(X)$.

c) $\det A=-4+3=-1\neq 0$, rezultă A inversabilă. Dacă $f(X_1)=f(X_2)$, atunci $AX_1=AX_2$. $A^{-1}AX_1=A^{-1}AX_2$, de unde $X_1=X_2$, adică f este injectivă.

Fie $Y\in M_2(\mathbb{R})$ a.î. $Y=AX$ atunci $A^{-1}Y=A^{-1}AX$; $A^{-1}Y=X$, deci f este surjectivă și cum era și injectivă, rezultă că este bijectivă.

2. a) Fie $X,Y\in M$; $AXY=(AX)Y=XAY$ și $XYA=X(YA)=XAY$. Rezultă că $XY\in M$.

b) Elementele mulțimii G sunt de forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, a\neq 0,\ a,b\in\mathbb{R}$ și conform punctului a) legea este bine definită. Înmulțirea matricelor este asociativă. Elementul neutru este I_2. Dacă $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, atunci din $X\cdot X'=X'\cdot X=I_2$. Rezultă că $X'=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\in G$.

c) $X^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix}=I_2$ dacă $a\in\{-1;1\}$ și $b=0$. Pentru $a=1$ obținem $X=I_2$. Deci singurul element de ordin 2 este $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

VARIANTA 57

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, cu $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}$ şi $x_0=1, y_0=0$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, y_1 şi y_2.

5p **b)** Să se arate că $x_n+y_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n, \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că $x_{n+2}-6x_{n+1}+x_n=0,\ \forall n\geq 0$.

2. Fie mulţimile de clase de resturi $\mathbb{Z}_7=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}\}$ şi $\mathbb{Z}_6=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ ecuaţia $\hat{3}\hat{x}^2+\hat{4}=\hat{0}$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului $\hat{3}$ în grupul $(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$.

5p **c)** Să se arate că nu există niciun morfism de grupuri $f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ cu $f(\overline{2})=\hat{3}$.

Soluţii

1. a) $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_n+4y_n\\ 2x_n+3y_n\end{pmatrix}$; $\begin{cases}x_{n+1}=3x_n+4y_n, & x_0=1\\ y_{n+1}=2x_n+3y_n, & y_0=0\end{cases}$

$x_1=3x_0+4y_0=3\cdot 1+4\cdot 0=3,\ y_1=2\cdot x_0+3y_0=2;$

$x_2=3x_1+4y_1=3\cdot 3+4\cdot 2=17;\ y_2=2x_1+3y_1=2\cdot 3+3\cdot 2=12;$

b) Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n=0$ avem $x_0+y_0\sqrt{2}=1$ (Adev.).

Presupunem că $P(n)$ este adevărată şi demonstrăm că $P(n)\to P(n+1)$.

$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}=(3x_n+4y_n)+\sqrt{2}(2x_n+3y_n)=3x_n+2\sqrt{2}x_n+4y_n+3\sqrt{2}y_n=$

$=x_n(3+2\sqrt{2})+\sqrt{2}\cdot y_n(2\sqrt{2}+3)=(3+2\sqrt{2})(x_n+y_n\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^{n+1}$. (A)

c) Avem $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_n+4y_n\\ 2x_n+3y_n\end{pmatrix}$.

Deci $x_{n+1}=3x_n+4y_n$, de unde $x_{n+2}=3x_{n+1}+4y_{n+1}$ şi $y_{n+1}=2x_n+3y_n$.

Atunci $x_{n+2}-6x_{n+1}+x_n=3x_{n+1}+4y_{n+1}-6x_{n+1}+x_n=4(2x_n+3y_n)-3x_{n+1}+x_n=$

$=8x_n+12y_n-3(3x_n+4y_n)+x_n=8x_n+12y_n-9x_n-12y_n+x_n=0$.

2. a) $\hat{3}x^2=-\hat{4}$, adică $\hat{x}^2=\hat{1}$, de unde $(\hat{x}-\hat{1})(\hat{x}+\hat{1})=0$, cum $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ este corp, nu are divizori ai lui zero, deci $x=\hat{1}$ sau $x=-\hat{1}$.

b) Cum $(\hat{3})^6=1$, atunci $\text{ord}(\hat{3})=6$.

c) $f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ este morfism, dacă $f(x+y)=f(x)\cdot f(y), \forall x, y\in\mathbb{Z}_6$.

$\overline{0}$ element neutru în $(\mathbb{Z}_6,+)$ şi $\hat{1}$ element neutru în $(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$. Deci $f(\overline{0})=\hat{1}$.

Avem $f(\overline{0})=f(\overline{2}+\overline{2}+\overline{2})=f(\overline{2})\cdot f(\overline{2})\cdot f(\overline{2})=\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{3}=\hat{6}\neq\hat{1}$.

VARIANTA 58

1. Fie $a,b,c,d>0$, matricea $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Se notează $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că dacă $\det A=0$, atunci f este funcţie constantă.

5p **b)** Să se arate că, dacă $\det A\neq 0$, atunci funcţia f este injectivă.

5p **c)** Să se arate că $\underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\{I_2+aA+bB\,|\,a,b\in\mathbb{R}, a\neq -1\}$.

5p **a)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **b)** Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că ecuaţia $X^2=I_2$ are o infinitate de soluţii în G.

Soluţii

1. a) $\det A=ad-bc$; $\det A=0$, atunci $ad=bc$, de unde $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$.

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\dfrac{a}{c}$ constantă.

b) $\det A\neq 0$ dacă $ad-bc\neq 0$. Fie $(\forall)x_1, x_2>0$ a.î. $f(x_1)=f(x_2)$, adică

$\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}=\dfrac{ax_2+b}{cx_2+d}$, $acx_1x_2+adx_1+bcx_2+bd=acx_1x_2+adx_2+bcx_1+bd$,

$(ad-bc)(x_1-x_2)=0$. Cum $ad-bc\neq 0$ avem $x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$, deci f este injectivă.

c) Se demonstrează prin inducţie. Pentru $n=1$ avem $f(x)=\dfrac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (A).

Ştim că $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$ adevărată. Demonstrăm că $P(n)\to P(n+1)$.

$$\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n+1 \text{ ori}}(x)=\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(f(x))=\frac{a_n\cdot f(x)+b_n}{c_n\cdot f(x)+d_n}=\frac{a_n\cdot\frac{ax+b}{cx+d}+b_n}{c_n\cdot\frac{ax+b}{cx+d}+d_n}=$$

$$= \frac{a_n \cdot a \cdot x + a_n b + b_n \cdot c \cdot x + b_n \cdot d}{c_n \cdot a \cdot x + c_n \cdot b + d_n \cdot c \cdot x + d_n \cdot d} = \frac{(a_n \cdot a + c \cdot b_n) + (a_n \cdot b + d \cdot b_n)}{(c_n \cdot a + c \cdot d_n)x + (c_n \cdot b + d \cdot d_n)} = \frac{a_{n+1} \cdot x + b_{n+1}}{c_{n+1}x + d_{n+1}}.$$

2. a) Fie $M = I_2 + aA + bB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det M = 1 + a \neq 0$, deci M inversabilă.

b) $(\forall) M, N \in G$, $M = I_2 + a_1 A + b_1 B$; $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq -1$; $N = I_2 + a_2 A + b_2 B$, $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq -1$.

$M \cdot N = I_2 + (a_1 + a_2 + a_1 a_2)A + (b_1 + b_2 + a_1 b_2)B \in G$.

S-a folosit $A^2 = A$, $A \cdot B = B$, $BA = O_2$ şi $B^2 = O_2$; $a_1 + a_2 + a_1 a_2 \neq -1$, deoarece $a_1 + a_2 + a_1 a_2 + 1 \neq 0$, $(1 + a_2)(1 + a_1) \neq 0$ (Adev.)

Fie $M \in G$, $M = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; conform a) ea este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Rămâne de arătat că $M^{-1} \in G$.

$$M^t = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}; \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1+a \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a} & -\frac{b}{1+a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$M^{-1} = I_2 + x \cdot A + y \cdot B$ pentru $x = \frac{-a}{1+a}$, $y = \frac{-b}{1+a}$.

Se observă că $x \neq -1$, deoarece $-a \neq -1 - a$, deci $M^{-1} \in G$.

Rezultă G subgrup.

c) Dacă $X \in G$, atunci $X = I_2 + aA + bB$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$.

$$X = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad X^2 = \begin{pmatrix} (a+1)^2 & b(a+2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Din $X^2 = I_2$ obţinem $(a+1)^2 = 1$ şi $b(a+2) = 0$.

Din $(a+1)^2 = 1$, rezultă $a_1 = 0$ şi $a_2 = -2$.

Dacă $a_1 = 0$, atunci $b = 0$ şi $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Dacă $a_2 = -2$, atunci $b \in \mathbb{R}$ şi $X = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deci ecuaţia $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluţii.

VARIANTA 59

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \end{cases}$, cu $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului are determinantul nenul.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită cel puţin două soluţii.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1 : mx + y + 1 = 0$, $d_2 : x + 3y + 2 = 0$, $d_3 : -x - y + 4 = 0$ sunt concurente.

2. Se consideră mulţimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| m, n \in \mathbb{Z}_5, m = \pm\hat{1} \right\}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, atunci $B \cdot A = A^{-1} \cdot B$.

5p **b)** Să se arate că H este un grup cu 10 elemente în raport cu înmulţirea matricelor.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor de ordinul 2 din grupul H.

Soluţii

1. a) $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

$\Delta = 12m - 2 - 1 + 3 + 2m - 4 = 14m - 4 \neq 0$, dacă $m \neq \frac{4}{14}$, deci $m \neq \frac{2}{7}$.

b) Sistemul admite cel puţin două soluţii dacă $\Delta = 0$, adică $m = \frac{2}{7}$.

c) Fie $d_2 \cap d_3 = \{P(a, b)\}$. Atunci $\begin{cases} a + 3b = -2 \\ -a - b = -4 \end{cases}$, de unde $a = 7$ şi $b = -3$.

$P(7, -3) \in d_1$ dacă $7m = 2$, adică $m = \frac{2}{7}$.

2. a) $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{4} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$; $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{4} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = B \cdot A$.

b) $m = \hat{1}$; $\hat{n} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ deci sunt 5 matrice; $m = -\hat{1} = \hat{4}$; $\hat{n} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$, deci sunt 5 matrice. În total 10 matrice.

Fie $X;Y\in H$, $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$. Atunci $XY=\begin{pmatrix}x_1y_1 & x_1y_2+x_2\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$. Cum $x_1;y_1\in\{-1;1\}$ rezultă $x_1\cdot y_1\in\{-1;1\}$. Deci $XY\in H$. Folosind proprietăţile înmulţirii în $\mathbb{Z}_5$ se arată că H este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

c) Fie $X\in H$, $X\neq I_2$. Atunci $X=\begin{pmatrix}m & n\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$. Dacă $\operatorname{ord}X=2$ atunci $X^2=I_2$;

$\begin{pmatrix}m^2 & mn+n\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$. Rezultă $m^2=\hat{1}$ şi $n(m+\hat{1})=\hat{0}$.

Din $m^2=\hat{1}$, obţinem $m_1=\hat{1}$ şi $m_2=-\hat{1}=\hat{4}$.

Dacă $m=\hat{1}$, atunci $n=\hat{0}$ şi $X=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$. Dar $X\neq I_2$.

Atunci $m=\hat{4}$ şi $n\in\mathbb{Z}_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$, de unde ecuaţia $X^2=I_2$ are 5 soluţii, deci H are 5 elemente de ordinul 2.

VARIANTA 60

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX$.

5p **a)** Să se calculeze $f(A)$.

5p **b)** Să se arate că $(f\circ f)(X)=O_2,\forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că $f(X)+f(Y)\neq I_2,\forall X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulţimea $P=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid AA^t=I_2\right\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ aparţine mulţimii P.

5p **b)** Să se arate că înmulţirea matricelor determină pe mulţimea P o structură de grup necomutativ.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in P$, $X\in M_2(\mathbb{R})$ şi $AX=B$, atunci $X\in P$.

Soluţii

1. a) $f(A)=A^2=O_2$.

b) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=A\cdot(AX)=A^2\cdot X=O_2$.

c) Dacă $f(X)+f(Y)=I_2$, atunci $A(X+Y)=I_2$, de unde $\det(A)\neq 0$, contradicţie.

2. a) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in P$

b) Dacă $A,B\in P$, atunci $(AB)(AB)^t=AB(B^tA^t)=A(BB^t)A^t=A\cdot A^t=I_2$, deci P este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.
Asociativitatea este evidentă, $I_2\in P$, iar pentru $A\in P$, avem $\det A=\pm 1$, deci A este inversabilă şi $A^{-1}\cdot(A^{-1})^t=A^{-1}(A^t)^{-1}=(A^tA)^{-1}=I_2$, deci $A^{-1}\in P$.
Rezultă $(P,\cdot)$ este grup.
Faptul că grupul nu este comutativ se verifică considerând, de exemplu, matricile $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in P$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in P$, obţinând $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B\cdot A$.

c) Dacă $A\cdot X=B$, atunci $X=A^{-1}\cdot B$ şi avem A^{-1} şi $B\in P$, atunci $A^{-1}\cdot B\in P$, deci $X\in P$.

VARIANTA 61

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{M_{a,b}\,|\,M_{a,b}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}\subset M_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $M_{a,b}\cdot M_{c,d}=M_{a+c,b+d}$, $\forall\, a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze, în funcție de a și b, rangul matricei $M_{a,b}-M_{a,b}^t$ ($M_{a,b}^t$ este transpusa lui $M_{a,b}$).

2. Se consideră un grup $(K,\cdot)$, unde $K=\{e,a,b,c\}$, e este elementul neutru și $a^2=b^2=c^2=e$.

5p **a)** Să se rezolve în grupul K ecuația $x^3=e$.

5p **b)** Să se arate că $ab=c$.

5p **c)** Să se arate că grupul $(K,\cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4,+)$.

Soluții

1. a) $M_{a,b}\cdot M_{c,d}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & c & d\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+c & b+d\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=M_{a+c,b+d}$

b) Dacă $A\in G$ rezultă $\det A=1\neq 0$, deci A este inversabilă.

c) $A=M_{a,b}-M_{a,b}^t=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & 0\\ -b & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\det A=0$, deci rang $A<3$.

Avem următoarele cazuri:

Dacă $a\neq 0$, atunci $\begin{vmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{vmatrix}=a^2\neq 0$, deci rangul este 2, oricare ar fi $b\in\mathbb{R}$.

Dacă $a=0$, atunci $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\\ -b & 0 & 0\end{pmatrix}$; pentru $b\neq 0$ avem $\begin{vmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{vmatrix}\neq 0$, deci rangul este 2 sau pentru $b=0$ rangul este 0.

2. a) Ecuația are numai soluția $x=e$. Într-adevăr, dacă $a^3=e$, cum $a^2=e$ avem $a=e$ (fals); analog celelalte 2 cazuri.

b) Dacă $ab=e$ avem $b=a$ (fals); dacă $ab=a$ avem $b=e$ (fals); dacă $ab=b$ avem $a=e$ (fals), deci rămâne $ab=c$.

c) Grupul de tip Klein nu este ciclic, iar $(\mathbb{Z}_4,+)$ este ciclic (generat de $\hat{1}$), deci grupurile nu pot fi izomorfe.

Altă metodă:

Fie $f\colon K\to\mathbb{Z}_4$ izomorfism, deci pentru $\hat{3}\in\mathbb{Z}_4$, există $x\in K$, astfel încât $f(x)=\hat{3}$; f injectivă, deci $x\neq e$, deoarece $f(e)=\hat{0}$.

Putem scrie $f(x\cdot x)=f(x)+f(x)$, adică $f(x^2)=\hat{3}+\hat{3}=\hat{2}$ sau $f(e)=\hat{2}\Rightarrow\hat{0}=\hat{2}$ (fals). Deci grupurile nu pot fi izomorfe.

VARIANTA 62

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2=2A$.

5p **a)** Să se arate că matricea $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ verifică relația $B^2=2B$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a+d\neq 2$, atunci $A=O_2$ sau $A=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a+d=2$, atunci $\det(A)=0$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4-1$, $g=X^6-1$.

5p **a)** Să se arate că un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g este X^2-1.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor complexe distincte ale ecuației $f(x)g(x)=0$.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

Soluții

1. a) $B^2=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}=2B$.

b) Se știe că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$ (*).

Din proprietatea (*) va rezulta $2A-(a+d)A+(\det A)I_2=O_2$ sau $(2-a-d)A+(\det A)I_2=O_2$ (1); din $A^2=2A$ rezultă $\det(A^2)=\det(2A)=4\det A$ sau $(\det A)^2=4\det A$, deci $\det A=0$ sau $\det A=4$.

Dacă $\det A=0\overset{(1)}{\Rightarrow}\underbrace{(2-a-d)}_{\neq 0^*}\cdot A=O_2$, deci $A=O_2$.

Dacă $\det A=4\neq 0$, din $A^2=2A\ |\cdot A^{-1}$ avem $A=2I_2$ (am folosit că în acest caz A este inversabilă).

c) Înlocuind în relația (*) va rezulta $2A-2A+(\det A)I_2=O_2$, deci $\det A=0$.

2. a) $f=(X^2-1)(X^2+1)$, $g=(X^3-1)(X^3+1)=(X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)=$
$=(X^2-1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$; c.m.m.d.c. $(f,g)=X^2-1$.

b) Deoarece $X^4-1=(X^2-1)(X^2+1)$ și $X^6-1=(X^2-1)(X^4+X^2+1)$, iar polinoamele X^2+1, X^4+X^2+1 au rădăcini simple și nu au rădăcini comune, rezultă 8 rădăcini complexe distincte ale ecuației $(x^4-1)(x^6-1)=0$.

c) $f=(X-1)(X+1)(X^2+1)$.

VARIANTA 63

1. Se consideră mulțimile $P=\{S\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,S^t=S\}$ și $Q=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,A^t=-A\}$.

5p **a)** Să se arate că $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\in P$ și $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\in Q$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A,B\in Q$, atunci $AB\in P$.

5p **c)** Să se arate că $\det(X)\geq 0$, oricare ar fi $X\in Q$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+2X^2+3X+45\in\mathbb{Z}[X]$ și $\hat{f}=X^3+X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_2[X]$.

5p **a)** Să se arate că rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului f nu sunt toate reale.

5p **b)** Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

Soluții

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ deci $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\in P$, iar $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\in Q$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$; $AB=\begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix}$, deci $AB\in P$.

c). Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $X^t=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Dacă $X\in Q$, atunci $X^t=-X$, adică $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, de unde $a=0$; $d=0$ și $b=-c$. Deci $X=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ și $\det X=b^2\geq 0$.

2. a) Fie $f(x)=x^3+2x^2+3x+45$; $f'(x)=3x^2+4x+3$. Cum $\Delta=-20<0$, atunci $f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

f continuă pe $\mathbb{R}$ rezultă că ecuația $f(x)=0$ are o singură soluție în $\mathbb{R}$.

b) Cum $\hat{f}(\hat{0})=\hat{1}$ și $\hat{f}(\hat{1})=\hat{1}$, atunci $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

c) Presupunem că f poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante cu coeficienți întregi, adică $f=(X+a)(X^2+bX+c)=X^3+(a+b)X^2+(ab+c)X+ac$. Atunci prin identificarea coeficienților ar rezulta $a+b=2$ (1); $ab+c=3$ (2); $ac=45$ (3). Din (1) rezultă că a, b pare sau a,b impare. Dacă a este par contrazice (3). Dacă a,b impare, atunci din (2) rezultă c par, care contrazice (3). Deci nu există o astfel de descompunere.

VARIANTA 64

1. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $AY=YA$, atunci $Y\in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in M$ și $\det(X)=0$, atunci $X=O_2$.

5p **c)** Să se arate că $A^n\in M, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^5-X^4+3X^3-X^2-2\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine o rădăcină întreagă a polinomului f.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+...+x_5^2$, unde $x_1,x_2,...,x_5$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

Soluții

1. a) Fie $Y=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ rezultă

$2a+3c=2a+b$, $2b+3d=3a+2b$, $a+2c=2c+d$, $b+2d=3c+2d$, deci $a=d$,

$b=3c$, deci $Y=\begin{pmatrix} a & 3c \\ c & a \end{pmatrix}\in M$.

b) $\det X=0$, dacă $x^2-3y^2=0$, $x,y\in\mathbb{Z}$ dacă $y\neq 0$ ar rezulta $\frac{x}{y}=\pm\sqrt{3}$ (fals), deci $y=0$ de unde $x=0$, deci $X=O_2$.

c) Demonstrăm prin inducție. $n=1$ verifică.

Presupunem $A^n=\begin{pmatrix} x_n & 3y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$ adevărată, deci $A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} x_n & 3y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2x_n+3y_n & 3x_n+6y_n \\ x_n+2y_n & 2x_n+3y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_n+3y_n & 3(x_n+2y_n) \\ x_n+2y_n & 2x_n+3y_n \end{pmatrix}\in M$.

2. a) $f=X^4(X-1)+3X^3-3X^2+2X^2-2=X^4(X-1)+3X^2(X-1)+2(X+1)(X-1)=$

$=(X-1)(X^4+3X^2+2X+2)$, deci $x=1$ rădăcina întreagă a lui f.

b) $x_1^2+x_2^2+...+x_5^2=(x_1+x_2+...+x_5)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_4x_5)=1-2\cdot 3=-5$.

c) Știm că $f=(X-1)(X^4+3X^2+2X+2)$. Deoarece

$X^4+3X^2+2X+2=(X^4+2X^2+1)+(X^2+2X+1)=(X^2+1)^2+(X+1)^2>0$

(deoarece binoamele nu se anulează pentru aceeași valoare $x\in\mathbb{R}$), rezultă că singura rădăcină reală a lui f este $x_1=1$.

VARIANTA 65

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=b \end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine a,b pentru care sistemul are soluția $(1, 1, 1)$.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, există $b\in\mathbb{Z}$, astfel încât sistemul să admită soluții cu toate componentele numere întregi.

2. Se consideră mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $X\in A$, $X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor X din mulțimea A care au proprietatea $X^2=O_3$.

Soluții

1. a) $(1,\ 1,\ 1)$ soluție dacă $a=2$, $6=6$, $0=b$, adică $a=2$ și $b=0$.

b) Sistemul este incompatibil dacă $\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0$ și $\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & b \end{vmatrix}\neq 0$.

Rezultă $a=4$ și $b\neq -2$.

c) Pentru $b=2$ avem sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=-2 \end{cases}$ care este compatibil $\forall a\in\mathbb{R}$ și pentru care $(0,\ 6,\ -2)$ este soluția cu toate componentele întregi, $\forall a\in\mathbb{Z}$.

2. a) Numărul de elemente al mulțimii A este egal cu numărul funcțiilor $f:\{a,b,c\}\to\mathbb{Z}_2$, adică $2^3=8$ elemente.

b) Dacă $X\in A$, atunci $X^2=\begin{pmatrix} a^2 & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a^2 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & a^2 \end{pmatrix}$ cu $a\in\mathbb{Z}_2$. Dacă $a=\hat{0}$, atunci $X=O_3$, iar dacă $a=\hat{1}$, atunci $X=I_3$.

c) Din b) dacă $X^2=O_3$, atunci $a=\hat{0}$, deci $X=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ b & c & \hat{0} \end{pmatrix}$. Cum $b,c\in\{\hat{0},\hat{1}\}$, pot exista $2\cdot 2=4$ matrice cu proprietatea dată.

VARIANTA 66

1. Fie dreptele $d_1: x+2y=3$, $d_2: 3x-4y=-1$, $d_3: 4x+3y=m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine m astfel încât dreptele să fie concurente.

5p **b)** Să se demonstreze că există o infinitate de valori ale lui m pentru care vârfurile triunghiului determinat de cele trei drepte au toate coordonatele întregi.

5p **c)** Să se calculeze valorile lui m pentru care triunghiul determinat de cele trei drepte are aria 1.

2. Fie polinomul $f=2X^3-aX^2-aX+2$, cu $a\in\mathbb{R}$ şi cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine a pentru care polinomul are trei rădăcini reale.

5p **c)** Să se determine a astfel încât $|x_1|+|x_2|+|x_3|=3$.

Soluţii

1. a) Fie $\{A\}=d_1\cap d_2$; $\begin{cases}x+2y=3\\3x-4y=-1\end{cases}$, deci $x=1, y=1$; $A(1,1)$. $A\in d_3\Leftrightarrow m=7$.

b) $d_1\cap d_2=\{A\}$, $A(1,1)$; $d_1\cap d_3=\{B\}$; $\begin{cases}x+2y=3\\4x+3y=m\end{cases}$, de unde $y=\frac{12-m}{5}$, $x=\frac{-9+2m}{5}$; deci $B\left(\frac{2m-9}{5},\frac{12-m}{5}\right)$ are coordonate întregi dacă $\frac{2m-9}{5},\frac{12-m}{5}\in\mathbb{Z}$, adică $m=5k+7$, $k\in\mathbb{Z}$.

$d_2\cap d_3=\{C\}$; $\begin{cases}3x-4y=-1\\4x+3y=m\end{cases}$, de unde $x=\frac{4m-3}{25}$, $y=\frac{3m+4}{25}$; deci $C\left(\frac{4m-3}{25},\frac{3m+4}{25}\right)$ are coordonate întregi dacă $\frac{4m-3}{25},\frac{3m+4}{25}\in\mathbb{Z}$, adică $m=25p+7$, $p\in\mathbb{Z}$.

Rezultă că pentru $m=25l+7$, cu $l\in\mathbb{Z}$, A, B, C au coordonate întregi.

c) Fie $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{2m-9}{5} & \frac{12-m}{5} & 1\\ \frac{4m-3}{25} & \frac{3m+4}{25} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{2m-14}{5} & \frac{7-m}{5} & 1\\ \frac{4m-28}{25} & \frac{3m-21}{25} & 1\end{vmatrix}=\frac{(m-7)^2(6+4)}{125}=\frac{2(m-7)^2}{25}$

$A_{ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{(m-7)^2}{25}$, $A_{ABC}=1$, dacă $(m-7)^2=25$, de unde $m\in\{2,12\}$.

2. a) $f(-1)=-2-a+a+2=0$.

b) $f=(X+1)[2X^2-(a+2)X+2]$ şi deci f are rădăcini reale dacă şi numai dacă $\Delta=(a+2)^2-16\geq 0$, adică $a\in(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$.

c) $x_1=-1; x_3=\frac{1}{x_2}$ şi $|x_2|+|x_3|=2\Rightarrow|x_2|=|x_3|=1$, deci vom avea $a\in[-6,2]$.

VARIANTA 67

1. Fie sistemul $\begin{cases}x+y+z=1\\x+my+z=1\\x+my+mz=-2\end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & m & 1\\1 & m & m\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $\text{rang}(A)\neq 2$, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui $m\neq 1$, pentru care sistemul are soluţie cu componente întregi.

2. Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$, elemente ale grupului $(S_4,\cdot)$.

5p **a)** Să se verifice că γ este soluţie a ecuaţiei $\alpha x=x\beta$.

5p **b)** Să se arate că $\alpha^4=\beta^4$.

5p **c)** Să se determine o soluţie a ecuaţiei $x\beta^3=\alpha^3 x$ în S_4.

Soluţii

1. a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & m & 1\\1 & m & m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & m-1 & 0\\1 & m-1 & m-1\end{vmatrix}=(m-1)^2$.

b) $\text{rang}A=2$ dacă $\det A=0$, adică $m=1$; dar pentru $m=1$ nu există niciun minor de ordinul 2 nenul, deci $\text{rang}A$ este 3 sau 1, $\forall m\in\mathbb{R}$.

c) Pentru $m\neq 1$ sistemul este compatibil determinat.

$\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & m & 1\\-2 & m & m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & m & 0\\-2 & m & m+2\end{vmatrix}=(m+2)(m-1)$;

$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & -2 & m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\3 & -2 & m\end{vmatrix}=0$; $\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & m & 1\\1 & m & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\0 & m & 1\\3 & m & -2\end{vmatrix}=3(1-m)=-3(m-1)$.

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{m+2}{m-1}=1+\frac{3}{m-1}$; $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=0$; $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-3}{m-1}$.

Sistemul are soluţie cu componente întregi dacă $x, z\in\mathbb{Z}$, adică $m-1$ este divizor a lui 3, deci $m\in\{-2, 0, 2, 4\}$.

2. a) γ este soluție a ecuației $\alpha x = x\beta$, dacă $\alpha\gamma = \gamma\beta$.

$\alpha\gamma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$;

$\gamma\beta = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$. Deci γ este soluție a ecuației $\alpha x = x\beta$.

b) $\alpha^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$; $\alpha^3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$; $\alpha^4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} = e$;

$\beta^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$; $\beta^3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$; $\beta^4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} = e$.

Deci $\alpha^4 = \beta^4$.

c) Avem $x\beta^3 = \alpha^3 x$ de unde $\alpha x\beta^3\beta = \alpha\alpha^3 x\beta$;

$\alpha x\beta^4 = \alpha^4 x\beta$;

$\alpha x = x\beta$. Din a) știm că $x = \gamma$ este o soluție pentru această ecuație.

VARIANTA 68

1. Se consideră matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că $B^t = B$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $B = 2I_2$, atunci $\det(A) \geq 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $x, y \in \mathbb{C}$ și matricea $xA + yA^t$ este inversabilă, atunci $x + y \neq 0$.

2. Se consideră ecuația $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, și x_1, x_2, x_3 soluțiile complexe ale acesteia.

5p **a)** Știind că $p = 1$ și $q = 0$, să se determine x_1, x_2, x_3.

5p **b)** Să se determine p și q știind că $x_1 = 1 + i$.

5p **c)** Să se arate că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$.

Soluții

1. a) Avem $B^t = A^t + A = B$.

b) $A = \begin{pmatrix}1&x&y\\-x&1&z\\-y&-z&1\end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, deci $\det(A) = 1 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$.

c) Dacă $x + y = 0$, atunci $y = -x$, deci $C = x(A - A^t)$ rezultă $\det C = 0$.

2. a) $x^3 + x = 0$, $x(x^2 + 1) = 0$, deci $x_1 = 0$, $x_2 = i$, $x_3 = -i$.

b) Dacă $x_1 = 1 + i$ este o soluție a ecuației, atunci și $x_2 = 1 - i$ este soluție a ecuației. Conform relațiilor lui Viéte avem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $x_1x_2x_3 = -q$. Din $1 + i + 1 - i + x_3 = 0$, obținem $x_3 = -2$. Din $-2(1+i)(1-i) = -q$; $-4 = -q$; obținem $q = 4$. $x_3 = -2$ soluție rezultă că $-8 - 2p + 4 = 0$, de unde $p = -2$.

c) x_1, x_2, x_3 rădăcini ale ecuației $x^3 + px + q = 0$. Avem: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p$ și $x_1x_2x_3 = -q$.

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2p$.

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p(x_1 + x_2 + x_3) - 3q = -3q$.

$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = (-2p)^2 = 4p^2$.

Rezultă $7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 7 \cdot (-3q) \cdot 4p^2 = -84p^2q$.

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - q(x_1 + x_2 + x_3) = 2p^2$

$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -p(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - q(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -p(-3q) - q \cdot (-2p) = 5pq$;

$x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 = -p(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5) - q(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) = -7p^2q$

Deci $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 12 \cdot (-7p^2q) = -84p^2q$, de unde rezultă egalitatea cerută.

Observație. Dacă $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ se poate arăta că $S_{n+3} = -pS_{n+1} - qS_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

VARIANTA 69

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^3-A=A^2-I_3$.

5p **b)** Să se arate că $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 3$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n+3$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se definește polinomul $P_n=X^n-1\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului P_4.

5p **b)** Să se descompună polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

5p **c)** Să se descompună polinomul P_6 în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Soluții

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

$A^3=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$;

Cum $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, atunci $A^3-A=A^2-I_3$.

b) $A^n=A^{n-2}+A^2-I_3$. Demonstrăm prin inducție. Fie $P(n): A^n=A^{n-2}+A^2-I_3$, $n\geq 3$.

Presupunem adevărat pentru $n-1$: $A^{n-1}=A^{n-3}+A^2-I_3$;

$A^n=A\cdot A^{n-1}=A^{n-2}+A^3-A$. Obținem $A^n-A^{n-2}=A^3-A\overset{a)}{=}A^2-I_3$.

c) Fie S_n suma elementelor matricei A^n.

Avem $S_1=4=1+3$, $S_2=5=2+3$. Presupunem că $S_{n-2}=n-2+3$.

$A^n=A^{n-2}+A^2-I_3$, $S_n=S_{n-2}+S_2-3=n-2+3+2+3-3=n+3$.

2. a) $P_4(X)=0$, $X^4-1=0$, $(X^2-1)(X^2+1)=0$. $P_4(x)$ are rădăcinile $1, -1, i, -i$.

b) $P_3(X)=X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)=(X-1)\left(X-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

pentru că rădăcinile polinomului X^2+X+1 sunt $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

c) $X^6-1=(X^3-1)(X^3+1)=(X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)$.

VARIANTA 70

1. Pentru orice două matrice $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se definește matricea $[A,B]=AB-BA$.

5p **a)** Pentru $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, să se calculeze $[A,A^2]$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A,A^*]=O_2$, unde A^* este adjuncta matricei A.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O_2$.

2. Se consideră intervalul $H=(0,1)$.

5p **a)** Să se arate că relația $a\circ b=\frac{ab}{ab+(1-a)(1-b)}$ definește o lege de compoziție pe H.

5p **b)** Să se arate că funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, $\forall x,y>0$, unde legea "$\circ$" este definită la punctul **a)**.

5p **c)** Știind că legea "$\circ$" definită la punctul **a)** este asociativă, să se rezolve în mulțimea $(H,\circ)$ ecuația $x\circ x\circ x=\frac{1}{2}$.

Soluții

1. a) $[A,A^2]=A^3-A^3=O_2$

b) Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Atunci $A^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$. Se verifică ușor că $AA^*=A^*\cdot A$.

Atunci $[A,A^*]=AA^*-A^*A=O_2$;

c) $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=A(BC-CB)-(BC-CB)A+B(CA-AC)-$
$-(CA-AC)B+C(AB-BA)-(AB-BA)C=ABC-ACB-BCA+CBA+BCA-BAC-$
$-CAB+ACB+CAB-CBA-ABC+BAC=O_2$.

2. a) Arătăm că $\forall a,b\in(0,1)$ avem $a\circ b=\frac{ab}{ab+(1-a)(1-b)}\in(0,1)$.

Cum $a,b\in(0,1)$, avem $a>0$, $b>0$, $1-a>0$, $1-b>0$, $ab+(1-a)(1-b)>0$ și

$ab<ab+(1-a)(1-b)$. Rezultă $a\circ b=\frac{ab}{ab+(1-a)(a-b)}<1$.

b) Fie $x,y>0$, $f(xy)=\frac{xy}{xy+1}$; $f(x)\circ f(y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)f(y)+(1-f(x))(1-f(y))}=$

$$=\frac{\frac{xy}{(x+1)(y+1)}}{\frac{xy}{(x+1)(y+1)}+\left(1-\frac{x}{x+1}\right)\left(1-\frac{y}{y+1}\right)}=\frac{xy}{(x+1)(y+1)}:\frac{xy+(x+1-x)(y+1-y)}{(x+1)(y+1)}=\frac{xy}{xy+1}$$

c) $x\circ x\circ x=\frac{x^2}{x^2+(1-x)^2}\circ x=\frac{x^3}{x^2+(1-x)^2}:\left[\frac{x^3}{x^2+(1-x)^2}+\left(1-\frac{x^2}{x^2+(1-x)^2}\right)(1-x)\right]=$

$=\frac{x^3}{x^3+[x^2+(1-x)^2-x^2](1-x)}=\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$. Avem $\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}=\frac{1}{2}$,

$2x^3=x^3+(1-x)^3$, $x^3=(1-x)^3$, $x=1-x$, $2x=1$, $x=\frac{1}{2}$.

VARIANTA 71

1. Se consideră determinantul de ordin $n\geq 2$, $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **b)** Să se verifice că $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}, \forall n\geq 4$.

5p **c)** Să se arate că $D_n=n+1, \forall n\geq 2$.

2. Un grup $(G,\cdot)$, cu elementul neutru e, are proprietatea (p) dacă $x^2=e$, $\forall x\in G$.

5p **a)** Să se verifice că mulțimea $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziție dată de $(a,b)\cdot(c,d)=(a+c,\ b+d), \forall a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p).

5p **b)** Să se arate că dacă un grup G are proprietatea (p), atunci $(xy)^2=x^2y^2$, $\forall x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că orice grup care are proprietatea (p) este comutativ.

Soluții

1. a) $D_3=8+0+0-0-2-2=4$.

b) D_n îl descompunem după prima linie:

$$D_n=2D_{n-1}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$ ($n-1$ linii; $n-1$ coloane).

Obținem $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$ (descompunere după linia 1 a determinantului din relație).

c) Demonstrăm prin inducție matematică.

I. $D_2=3$, $D_3=4$ (A)

II. Presupunem $D_k=k+1$, $D_{k+1}=k+2$ și arătăm că $D_{k+2}=k+3$.

$D_{k+2}=2D_{k+1}-D_k=2k+4-k-1=k+3$ (A)

Rezultă că $D_n=n+1$, $\forall n\geq 2$.

2. a) Se verifică ușor că $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ împreună cu legea de compoziție dată este un grup cu elementul neutru $e=(e_1,e_2)=(\hat{0},\hat{0})$. Cum $a,b\in\{\hat{0},\ \hat{1}\}$ rezultă că $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ avem: $(a,b)(a,b)=(\hat{2}a,\hat{2}b)=(\hat{0},\hat{0})=(e_1,e_2)$.

b) $x, y \in G$ şi G are proprietatea (p), rezultă $x^2 = e$; $y^2 = e$; $(xy)^2 = e$; $x^2y^2 = e \cdot e = e^2 = e$. Deci $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall x, y \in G$.

c) G are proprietatea „p", deci $\forall x, y \in M$ rezultă $(xy)^2 = x^2y^2$.

Dar $(xy)^2 = x^2y^2$ echivalent cu $(xy)(xy) = x^2y^2$; $xyxy = xxyy \mid \cdot x^{-1}$, rezultă $yxy = xyy \mid \cdot y^{-1}$, $yx = xy$, $\forall x, y \in G$, deci grupul este comutativ.

VARIANTA 72

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(I_3 + xA^2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $B^2 = A$.

5p **c)** Să se arate că $\forall C \in M_3(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(C + xA)\det(C - xA) \leqslant (\det C)^2$.

2. Se consideră polinomul $p = X^3 - X + m$ cu $m \in \mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Ştiind că $m = -6$, să se determine x_1, x_2, x_3.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

Soluții

1. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x & 3x & 3x \\ 3x & 3x & 3x \\ 3x & 3x & 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 & 3x & 3x \\ 3x & 3x+1 & 3x \\ 3x & 3x & 3x+1 \end{pmatrix}$;

$\det M = 9x + 1 = 0$ dacă $x = -\frac{1}{9}$.

b) De exemplu, $B = \frac{1}{\sqrt{3}} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

c) $\det(C + xA) = \begin{vmatrix} c_{11}+x & c_{12}+x & c_{13}+x \\ c_{21}+x & c_{23}+x & c_{23}+x \\ c_{31}+x & c_{32}+x & c_{33}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}+x & c_{12}-c_{11} & c_{13}-c_{11} \\ c_{21}+x & c_{22}-c_{21} & c_{23}-c_{21} \\ c_{31}+x & c_{32}-c_{31} & c_{33}-c_{31} \end{vmatrix} =$

$= \det C + x \begin{vmatrix} 1 & c_{12}-c_{11} & c_{13}-c_{11} \\ 1 & c_{22}-c_{21} & c_{23}-c_{21} \\ 1 & c_{32}-c_{31} & c_{33}-c_{31} \end{vmatrix} = \det C + x \cdot m$, $m \in \mathbb{R}$, m este constantă reală depinzând de elementele lui C.

Analog, $\det(C - xA) = \det C - x \cdot m$ (iese acelaşi m folosind descompunerea unui determinant în sumă de determinanți)

$(\det C + xm)(\det C - xm) = (\det C)^2 - (xm)^2 \leqslant (\det C)^2$, căci $xm \in \mathbb{R}$

2. a) $m=-6$; $x^3-x-6=0$

	x^3	x^2	x	x^0
	1	0	−1	−6
2	1	2	3	0

$$(x-2)(x^2+2x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_{2,3}=\dfrac{-2\pm 2i\sqrt{2}}{2}=-1\pm i\sqrt{2} \end{cases}$$

b) Conform relațiilor lui Viète avem $x_1+x_2+x_3=0$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1$.

Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=0+2=2$.

x_1, x_2, x_3 rădăcini pentru P, rezultă $\begin{matrix} x_1^3=x_1-m \mid \cdot x_1 \\ x_2^3=x_2-m \mid \cdot x_2 \\ x_3^3=x_3-m \mid \cdot x_3 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x_1^4=x_1^2-mx_1 \\ x_2^4=x_2^2-mx_2 \\ x_3^4=x_3^2-mx_3 \end{matrix}$.

Prin adunarea ultimelor relații obținem $x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_1^2+x_2^2+x_3^2-m(x_1+x_2+x_3)=2$.

c) *Metoda I:* Pentru ca ecuația să aibă rădăcini întregi trebuie ca $m\in\mathbb{Z}$.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x+m$.

$f'(x)=3x^2-1$, $f'(x)=0$ dacă $x\in\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + +	0	− − − −	0	+ + + + + +		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$m+\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	$m-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	$+\infty$

Pentru ca ecuația $x^3-x+m=0$ să aibă 3 rădăcini reale, trebuie ca $m+\frac{2}{3\sqrt{3}}>0$ și $m-\frac{2}{3\sqrt{3}}<0$ rezultă $m\in\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}},\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$. Dar $m\in\mathbb{Z}$, de unde rezultă că $m=0$.

Pentru $m=0$, ecuația devine $x^3-x=0$, cu rădăcinile $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

Metoda II: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$ și x_1, x_2, x_3 întregi impun ca una din rădăcini să fie nulă, iar celelalte două să aibă modulul egal cu 1. Presupunem $x_1=0$ și obținem $m=0$, apoi $x_2=1$, $x_3=-1$.

VARIANTA 73

1. Fie matricea $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se asociază fiecărui punct $A(x,y)$ punctul $A_M(x',y')$, unde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

5p **a)** Știind că $a=1,b=2,c=3,d=4$ și că $A(-1,1)$, să se determine coordonatele punctului A_M.

5p **b)** Știind că $a=1,b=2,c=2,d=4$, să se arate că toate punctele A_M se află pe dreapta $y=2x$.

5p **c)** Fie A, B, C trei puncte în plan. Dacă se notează cu S și S_M ariile triunghiurilor ABC, respectiv $A_MB_MC_M$, atunci $S_M=S\cdot|\det M|$.

2. Se consideră mulțimea $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{0} & a & d \\ \hat{0} & \hat{0} & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că mulțimea A este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=X$, cu $X\in A$.

Soluții

1. a) Din $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rezultă $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$, de unde $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$.

Obținem $x'=1(-1)+2\cdot 1=1$ și $y'=3\cdot(-1)+4\cdot 1=1$, adică $A'(1;1)$.

b) Avem $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=2x+4y \end{cases}$

$A_M(x',y')$ aparține dreptei $y=2x$, dacă $y'=2x'$.

Cum $2x+4y=2(x+2y)$, atunci A_M aparține dreptei $y=2x$.

c) Fie $S=A_{ABC}$ și $S_M=A_{A_MB_MC_M}$.

$$S=\frac{1}{2}\cdot|\Delta_1|,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix};\quad S_M=\frac{1}{2}\cdot|\Delta_M|,\ \Delta_M=\begin{vmatrix} x_{A_M} & y_{A_M} & 1 \\ x_{B_M} & y_{B_M} & 1 \\ x_{C_M} & y_{C_M} & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_M=\frac{1}{2}\cdot|\Delta_M|=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} ax_A+by_A & cx_A+dy_A & 1 \\ ax_B+by_B & cx_B+dy_B & 1 \\ ax_C+by_C & cx_C+dy_C & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} ax_A & cx_A & 1\\ ax_B & cx_B & 1\\ ax_C & cx_C & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_A & dy_A & 1\\ ax_B & dy_B & 1\\ ax_C & dy_C & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by_A & cx_A & 1\\ by_B & cx_B & 1\\ by_C & cx_C & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by_A & dy_A & 1\\ by_B & dy_B & 1\\ by_C & dy_C & 1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|ad\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix} y_A & x_A & 1\\ y_B & x_B & 1\\ y_C & x_C & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|ad\cdot 2S-bc\cdot 2S\right|=\frac{1}{2}\cdot 2S\cdot\left|ad-bc\right|=S\left|\det M\right|$$

2. a) Cum $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2=\{\hat{0};\hat{1}\}$, atunci fiecare poate lua câte două valori, de unde vor rezulta $2^4=16$ elemente ale mulțimii A.

b) Fie $A_1, A_2\in A$; $A_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ \hat{0} & a_1 & d_1\\ \hat{0} & \hat{0} & a_1\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2\\ \hat{0} & a_2 & d_2\\ \hat{0} & \hat{0} & a_2\end{pmatrix}$;

$$A_1\cdot A_2=\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2+b_1a_2 & a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2\\ \hat{0} & a_1a_2 & a_1d_2+d_1a_2\\ \hat{0} & \hat{0} & a_1a_2\end{pmatrix}\in A.$$

Deci A este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b & c\\ \hat{0} & a & d\\ \hat{0} & \hat{0} & a\end{pmatrix}$. Atunci $X^2=\begin{pmatrix} a^2 & \hat{0} & bd\\ \hat{0} & a^2 & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & a^2\end{pmatrix}$.

Din $X^2=X$, obținem $a^2=a$, $b=d=\hat{0}$ și $c=bd=\hat{0}$.

Din $a^2=a$, rezultă $a_1=\hat{0}$ sau $a_2=\hat{1}$.

Soluțiile ecuației sunt O_2 și I_2.

VARIANTA 74

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det A$.

5p **b)** Să se verifice relația $A(A^2+6I_3)=O_3$.

5p **c)** Să se arate că $\det(I_3+xA^2)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{Z}$ și polinomul $p=X^3+aX^2+X+b$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Știind că $a=b=1$, să se afle rădăcinile polinomului p.

5p **b)** Să se determine a și b, știind că polinomul p are rădăcina dublă 1.

5p **c)** În cazul $b=1$, să se determine valorile lui a pentru care polinomul p are o rădăcină rațională.

Soluții

1. a) $\det A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=0+2-2-0-0-0=0$.

b) Avem $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2\\ 2 & -5 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix}$ și $A^2+6I_3=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Atunci $A(A^2+6I_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=O_3$.

c) Cum $I_3+xA^2=\begin{pmatrix} 1-2x & 2x & 2x\\ 2x & 1-5x & x\\ 2x & x & 1-5x\end{pmatrix}$, atunci $\det(I_3+xA^2)=(1-6x)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. a) $p(X)=X^3+X^2+X+1=X^2(X+1)+(X+1)=(X+1)(X^2+1)$.

Dacă $p(x)=0$, atunci $x_1=-1, x_2=-i, x_3=i$.

b) $x=1$ este rădăcină dublă pentru p, dacă $p(1)=0$, $p'(1)=0$ și $p''(1)\neq 0$.

Fie $p(x)=x^3+ax^2+x+b$ funcția polinomială; $p'(x)=3x^2+2ax+1$, $p''(x)=6x+2a$.

Dacă $p(1)=0$, atunci $1+a+1+b=0$. Dacă $p'(1)=0$, atunci $3+2a+1=0$. Rezultă $a=-2$ și $b=0$, de unde $p''(x)=6x-4$. Cum $p''(1)=2\neq 0$, atunci $a=-2$ și $b=0$ verifică cerința problemei.

c) Dacă $b=1$, polinomul devine $p=X^3+aX^2+X+1$. Dacă p are rădăcini raționale, acestea se găsesc printre divizorii lui 1, adică ele pot fi 1 sau -1.

Dacă $x_1=1$, rădăcină pentru p, atunci $1+a+1+1=0$, deci $a=-3$.

Dacă $x_1=-1$ este rădăcină pentru p, atunci $-1+a-1+1=0$, deci $a=1$.

VARIANTA 75

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi $M_x=\frac{x}{3}A+\frac{1}{3x^2}B$, $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze produsul AB.

5p **b)** Să se arate că $M_xM_y=M_{xy}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x)\neq 0$.

2. Se consideră polinomul $p=X^4-aX^3-aX+1$, cu $a\in\mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se verifice că $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu X^2-1 pentru nicio valoare a lui a.

5p **c)** Să se arate că dacă $a=\frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1

Soluţii

1. a) $AB=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$.

b) $M_x\cdot M_y=\left(\frac{x}{3}A+\frac{1}{3x^2}B\right)\left(\frac{y}{3}A+\frac{1}{3y^2}B\right)=\frac{xy}{9}A^2+\frac{x}{9y^2}AB+\frac{y}{9x^2}BA+\frac{1}{9x^2y^2}B^2=$

$=\frac{xy}{9}A^2+O_3+\frac{1}{9x^2y^2}B^2$.

$A^2=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-3\\-3&6&-3\\-3&-3&6\end{pmatrix}=3A$. Analog, $B^2=3B$.

Rezultă $M_x\cdot M_y=\frac{xy}{9}\cdot 3A+\frac{1}{9x^2y^2}\cdot 3B=\frac{xy}{3}A+\frac{1}{3x^2y^2}B=M_{xy}$.

c) Observăm că $A+B=3I_3$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\exists\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^*$ cu $M_x\cdot M_{\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B=\frac{1}{3}\cdot 3I_3=I_3$. Analog, $M_{\frac{1}{x}}\cdot M_x=I_3$.

Deci $\exists(M_x)^{-1}=M_{\frac{1}{x}}$, adică M_x este inversabilă, deci $\det(M_x)\neq 0$.

2. a) $x_1+x_2+x_3+x_4=s_1=a$; $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{s_3}{s_4}=\frac{a}{1}=a$. Rezultă că sunt egale.

b) $p=X^4-aX^3-aX+1$; $p(1)=1-a-a+1=2-2a$; $p(-1)=1+a+a+1=2+2a$.

$p\vdots(X^2-1)$ dacă $p(1)=p(-1)=0$, adică $2-2a=0$, $2+2a=0$. Rezultă $a=1$ şi $a=-1$, contradicţie.

c) $p(x)=0$; $x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x+1=0\,|:x^2\neq 0$. Obţinem o ecuaţie reciprocă de grad 4:

$x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$; notăm $x+\frac{1}{x}=t$ şi avem $t^2-\frac{1}{2}t-2=0$, de unde $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$.

Deoarece $x+\frac{1}{x}\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, în timp ce $t_1\in(-2,2)$ şi $t_2\in(-2,2)$

deducem că ecuaţiile: $x+\frac{1}{x}=t_1\Leftrightarrow x^2-t_1x+1=0$ şi $x+\frac{1}{x}=t_2\Leftrightarrow x^2-t_2x+1=0$ au rădăcini complexe conjugate al căror produs este egal cu 1, deci $|x_1|=|x_2|=|x_3|=|x_4|=1$.

VARIANTA 76

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi A^* adjuncta sa.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A^*)=(\det A)^2$.

5p **c)** Să se arate că matricea $A-I_3$ are rangul cel mult 1.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a\in G$ se defineşte funcţia $f_a:G\to G$, $f_a(x)=ax, \forall x\in G$.

5p **a)** Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a\in G$.

5p **b)** Să se arate că $f_a\circ f_b=f_{ab}$, $\forall a,b\in G$.

5p **c)** Fie $\mathcal{F}(G)=\{f_a:G\to G\,|\,a\in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operaţia de compunere a funcţiilor formează un grup.

Soluţii

1. a) $\det A=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)+2a^2b^2c^2-(ac)^2(1+b^2)-(ab)^2(1+c^2)-$
$-(bc)^2(1+a^2)=(1+a^2+b^2+a^2b^2)(1+c^2)+2a^2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2c^2-a^2b^2-a^2b^2c^2-$
$-b^2c^2-b^2a^2c^2=1+a^2+b^2+a^2b^2+c^2+a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2c^2+2a^2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2-$
$-b^2c^2-3a^2b^2c^2=1+a^2+b^2+c^2$.

b) Avem $A\cdot A^{-1}=I_3$, deci $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$. Dar $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*$, deci

$\det A^{-1}=\dfrac{1}{(\det A)^3}\cdot\det A^*$, de unde $(\det A)^2=\det A^*$.

c) $A-I_3=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$; $\det(A-I_3)=a\cdot b\cdot c\cdot\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{vmatrix}=0$, de unde $\operatorname{rang}A\leqslant 2$.

Cum orice minor de ordinul doi al matricei A este nul, atunci $\operatorname{rang}A\leqslant 1$.

2. a) $\forall y\in G$, ecuaţia $f_a(x)=y$ are exact o soluţie $x\in G$.

$f_a(x)=y$, $ax=y\,|\cdot a'$, avem $x=a'y\in G$, căci $a\in G$ şi $(G,\cdot)$ grup, deci $\exists a'$.

Fie $a'\in G, y\in G$, $(G,\cdot)$ grup, rezultă $a'y\in G$, soluţie unică, deci f este bijectivă.

b) $(f_a\circ f_b)(x)=f_a(f_b(x))=a\cdot f_b(x)=abx=f_{ab}(x)$.

c) (1) lege de compoziţie: $(f_a\circ f_b)(x)=f_a(f_b(x))=f_a(bx)=abx=(ab)x=f_{ab}(x)$,
$f_{ab}:G\to G$, deci $f_{ab}\in\mathcal{F}(G)$.

(2) asociativitatea: Deoarece compunerea funcţiilor este asociativă în caz general rezultă că este asociativă şi pe $\mathcal{F}(G)$.

(3) admite element neutru: Fie e elementul neutru din G.
Deoarece $(f_a\circ f_e)(x)=(f_e\circ f_a)(x)=f_{ae}(x)=f_a(x)$ deducem că f_e este elementul neutru în $\mathcal{F}(G)$.

(4) elemente simetrizabile: Fie $f_a\in\mathcal{F}(G)$; dacă notăm cu a' inversul lui a din G se verifică uşor că f_a, reprezintă inversul lui f_a din $\mathcal{F}(G)$ deoarece $f_a\circ f_{a'}=f_{a'}\circ f_a=f_{aa'}=f_e$. În concluzie, $(\mathcal{F}(G),\circ)$ este grup.

VARIANTA 77

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinatul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

2. Se consideră $\alpha > 0$ un număr real și mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - 6(x+y) + 7\alpha$.

5p **a)** Să se arate că pentru $\alpha = 2$, cuplul $(G_2, *)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se arate că grupurile $(G_2, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe, prin funcția $f : G_2 \to \mathbb{R}_+^*, f(x) = 3x - 6$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $\alpha \geq 2$, mulțimea G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.

Soluții

1. a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ m & 1 & m \\ m & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3(1 - m^2)$.

b) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ avem $\operatorname{rang} A = 3$. Dacă $m = 1$ avem $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, deci $\operatorname{rang} A = 2$.

Dacă $m = -1$ avem $\Delta_p = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0$, deci $\operatorname{rang} A = 2$. Rezultă $\operatorname{rang} A \geq 2$.

c) Dacă $m = 1$ avem $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 1 - 1 = 0$. Rezultă sistem compatibil. Dacă $m = -1$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\Delta_c = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -3 + 2 - 1 - 6 + 1 + 1 = -9 + 3 = -6 \neq 0$. Rezultă sistem incompatibil pentru $m = -1$.

2. a) Pentru $\alpha = 2$ avem $x * y = 3xy - 6(x+y) + 14$, $G_2 = (2; +\infty)$.

– lege de compoziție: arătăm că $(\forall) x, y > 2$ avem $x * y > 2$.

$3xy - 6x - 6y + 14 > 2$, $3x(y-2) - 6(y-2) > 0$, $3(y-2)(x-2) > 0$ (A).

– asociativitate: $x * (y * z) = (x * y) * z$, $(\forall) x, y, z \in G_2$ se verifică prin calcul

– comutativitate: $x * y = 3xy - 6(x+y) + 14 = 3yx - 6(y+x) + 14 = y * x$, $(\forall) x, y \in G_2$,

– element neutru: $\exists e \in G_2$ a.î. $x * e = e * x = x$, $(\forall) x \in G_2$.

$3xe - 6x - 6e + 14 = x$, $3e(x-2) - 7(x-2) = 0 \Rightarrow (x-2)(3e-7) = 0$, $(\forall) x \in G_2$, deci $e = \frac{7}{3} \in G_2$.

– elemente simetrizabile: $(\forall) x \in G_2$ $(\exists) x' \in G_2$ a.î. $x * x' = x' * x = e$;

$3xx' - 6x - 6x' + 14 = \frac{7}{3}$, $x'(3x-6) = 6x - 14 + \frac{7}{3}$,

$x' = \frac{6x - 14 + \frac{7}{3}}{3x-6} = \frac{18x - 35}{9(x-2)} = 2 + \frac{1}{9(x-2)} > 2$, deci $x' \in G_2$.

Rezultă că $(G_2, *)$ este grup abelian.

b) $f : G_2 \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 3x - 6$;

$f(x * y) = 3(x * y) - 6 = 3(3xy - 6x - 6y + 14) - 6 = 9xy - 18x - 18y + 36$;

$f(x) \cdot f(y) = (3x-6)(3y-6) = 9xy - 18x - 18y + 36$.

Rezultă $f(x * y) = f(x) f(y)$, $(\forall) x, y \in G_2$

Fie $f(x_1) = f(x_2)$, deci $3x_1 - 6 = 3x_2 - 6 \Rightarrow x_1 = x_2$. Rezultă f injectivă

$(\forall) y \in \mathbb{R}_+^*$, $(\exists) x \in G_2 = (2; +\infty)$ a.î. $f(x) = y$:

$3x - 6 = y$, $x = \frac{6+y}{3} = 2 + \frac{y}{3} \in (2; +\infty)$, deci f este surjectivă.

În concluzie, f este bijectivă.

c) Fie $x, y \in (\alpha, \infty)$.

$x * y = 3xy - 6x - 6y + 7\alpha = 3xy - 6x - 6y + 12 - 12 + 7\alpha =$

$= 3x(y-2) - 6(y-2) + 7\alpha - 12 = 3(y-2)(x-2) + 7\alpha - 12 =$

$= 3(x-2)(y-2) + 6(\alpha - 2) + \alpha \geq \alpha$.

Deci G_α este parte stabilă în raport cu „$*$“.

VARIANTA 78

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+mz+t=3 \\ 5x-6y+10z+nt=p \end{cases}$, $m,n,p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0,y_0,z_0,t_0) cu $z_0=t_0=0$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m,n\in\mathbb{R}$, rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m,n,p\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.

2. Fie mulțimea $Q_0=\left\{\frac{m}{n}\,|\,m,n\in\mathbb{Z},\ m \text{ și } n \text{ sunt impare}\right\}$ și $G=Q_0\times\mathbb{Z}$. Pe G se definește legea de compoziție $(q_1,k_1)*(q_2,k_2)=(q_1q_2,k_1+k_2),\ \forall q_1,q_2\in Q_0,\forall k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se calculeze $(1,1)*(1,2)*\ldots*(1,10)$.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:G\to\mathbb{Q}^*,\ f((q,k))=q\cdot 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

Soluții

1. a) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+9y=3 \\ 5x-6y=p \end{cases}$; $\Delta_p=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=18+3=21\neq 0$; $\Delta_c=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 5 & -6 & p \end{vmatrix}=18p+6-45+$

$+45+3p+36=21p+42$; $\Delta_c=0$ dacă $p=-2$.

b) $\Delta_p=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=21\neq 0\Rightarrow \text{rang}A\geqslant 2$;

c) $\Delta_p=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=21\neq 0\Rightarrow \text{rang}A\geqslant 2$. Pentru a nu avea rangul trei trebuie ca:

$\Delta_{o_1}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 9 & m \\ 5 & -6 & 10 \end{vmatrix}=0$, adică $6-3m=0$, $m=2$.

$\Delta_{o_2}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 9 & 1 \\ 5 & -6 & n \end{vmatrix}=0$, adică $252+21n=0$, $n=-12$.

$\Delta_c=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 5 & -6 & p \end{vmatrix}=0$, adică $42+21p=0$, $p=-2$.

2. a) lege internă: $(q_1;k_1)*(q_2;k_2)=(q_1q_2;k_1+k_2)$, $(\forall)q_1,q_2\in Q_0$, $(\forall)k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

Fie $q_1=\frac{m_1}{n_1}$ cu m_1 și $n_1\in\mathbb{Z}$ impare și $q_2=\frac{m_2}{n_2}$ cu m_2 și $n_2\in\mathbb{Z}$ impare. Avem

$q_1\cdot q_2=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}$ cu $m_1m_2\in\mathbb{Z}$, $n_1\cdot n_2\in\mathbb{Z}$ impare, deci $q_1\cdot q_2\in Q_0$, iar $k_1+k_2\in\mathbb{Z}$.

– asociativitatea:

$[(q_1;k_1)*(q_2;k_2)]*(q_3;k_3)=(q_1;k_1)*[(q_2;k_2)*(q_3;k_3)]$, $(\forall)(q_i;k_i)\in G$, $i=\overline{1,3}$.

$(q_1q_2;k_1+k_2)*(q_3;k_3)=(q_1;k_1)*(q_2\cdot q_3;k_2+k_3)$

$((q_1\cdot q_2)\cdot q_3;(k_1+k_2)+k_3)=(q_1(q_2\cdot q_3);k_1+(k_2+k_3))$ (A) din asociativitatea adunării și înmulțirii numerelor.

– comutativitatea: $(q_1;k_1)*(q_2;k_2)=(q_2;k_2)*(q_1;k_1)$, $(\forall)q_1,q_2\in Q_0$, $(\forall)k_1,k_2\in\mathbb{Z}$

$(q_1q_2;k_1+k_2)=(q_2\cdot q_1;k_2+k_1)$ (A) din comutativitatea adunării și înmulțirii numerelor.

– element neutru: $(\exists)(e_1,e_2)\in G$ a.î. $(q_1;k_1)*(e_1;e_2)=(e_1;e_2)*(q_1;k_1)=(q_1;k_1)$, $(\forall)q_1\in Q_0$ și $(\forall)k_1\in\mathbb{Z}$.

$(q_1e_1;k_1+e_2)=(q_1;k_1)$, $\begin{cases} q_1\cdot e_1=q_1 \\ k_1+e_2=k_1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} e_1=1 \\ e_2=0 \end{cases}$. Rezultă $(1;0)$ element neutru $\in G$.

– element simetrizabil: $(\forall)(q_1,k_1)\in G\ (\exists)(q';k')\in G$ a.î.

$(q_1;k_1)*(q';k')=(q';k')*(q_1;k_1)=(1;0)$

$(q_1q';k_1+k')=(1;0)$ deci $q'=\frac{1}{q_1}\in Q_0$ și $k'=-k_1\in\mathbb{Z}$.

Rezultă $(G,*)$ grup abelian.

b) $(1,1)*(1,2)*\ldots*(1,10)=(1,1+2+\ldots+10)=(1,55)$.

c) $f[(q_1;k_1)*(q_2;k_2)]=f(q_1;k_1)\cdot f(q_2;k_2)$

$f(q_1q_2;k_1+k_2)=(q_1\cdot q_2)\cdot 2^{k_1+k_2}=(q_1\cdot 2^{k_1})\cdot(q_2\cdot 2^{k_2})=f(q_1;k_1)\cdot f(q_2;k_2)$, deci f este morfism.

f este bijectivă prin construcție.

VARIANTA 79

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ & my+ & 2z=1 \\ x+(2m-1)y+ & & 3z=1 \\ x+ & my+(m-3)z=2m-1 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

5p **c)** Pentru $m=1$ să se determine soluțiile reale (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $2x_0^2-y_0^2+3z_0^2=14$.

2. Pe mulțimea $G=[0,1)$ se definește legea de compoziție $x*y=\{x+y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{2}{3}*\frac{3}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x*x*x=\frac{1}{2}$, $x\in G$.

Soluții

1. a) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 1 & 2m-1 & 3 \\ 1 & m & m-3 \end{vmatrix}=(m-1)(m-5)$

Dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$, rezultă sistemul este compatibil determinat.

b) Pentru $m=1$ avem $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+y+3z=1 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$; $\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0$, deci $\operatorname{rang}A=2$.

$\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$, deci $\operatorname{rang}\overline{A}=2$. Rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat.

Pentru $m=5$, avem $\left\{\begin{matrix} x+5y+2z=1 \\ x+9y+3z=1 \\ x+5y+2z=9 \end{matrix}\right\}$, care este un sistem incompatibil.

În concluzie, sistemul este compatibil nedeterminat pentru $m=1$.

c) $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+y+3z=1 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$; $\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$, $\begin{cases} y+2z=1-x_0 \\ y+3z=1-x_0 \end{cases}$; $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1-x_1 & 2 \\ 1-x_0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=1-x_0$ și

$z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_0 \\ 1 & 1-x_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=0$, deci $\begin{cases} x=x_0 \\ y=1-x_0,\ x_0\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$.

$2x_0^2-y_0^2+3z_0^2=14$, $2x_0^2-(1-x_0)^2=14$, $2x_0^2-1+2x_0-x_0^2-14=0$,

$x_0^2+2x_0-15=0$, avem $x_{01}=-5$ și $x_{02}=3$.

Rezultă $(x_0, y_0, z_0)\in\{(-5, 6, 0); (3, -2, 0)\}$.

2. a) $\frac{2}{3}*\frac{3}{4}=\left\{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right\}=\left\{\frac{17}{12}\right\}=\frac{5}{12}$.

b) $\forall x, y\in[0,1)$; $x*y=\{x+y\}\in[0,1)$; $x*y=y*x$, $\forall x, y\in[0,1)$.

Fie $x, y, z\in[0,1)$; $(x*y)*z=\{x+y\}*z=\{(x+y)+z\}=\{x+(y+z)\}=$

$=x*\{y+z\}=x*(y*z)$

$x*e=x$, $\forall x\in[0,1)$; $\{x+e\}=x$, $\forall x\in[0,1)$ avem $e=0$.

$x*x'=0$; $\{x+x'\}=0$; $x'=\begin{cases} 1-x, x\in(0,1) \\ 0, x=0 \end{cases}$.

Rezultă că $(G,*)$ este grup abelian.

c) Ecuația $x*x*x=\frac{1}{2}$ devine $\{3x\}=\frac{1}{2}$ (1).

$x\in G$, rezultă $0\leqslant x<1 \mid\cdot 3$; $0\leqslant 3x<3$ (2).

Din (1) și (2) obținem $3x\in\left\{\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\}$, adică $x\in\left\{\frac{1}{6};\frac{3}{6};\frac{5}{6}\right\}$.

VARIANTA 80

1. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\in S_5$ și mulțimea $A=\{\sigma^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$.

5p **a)** Să se determine numărul inversiunilor lui σ.

5p **b)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **c)** Fie $\tau\in S_5$ astfel încât $\tau\sigma^2=\sigma^2\tau$. Să se arate că $\tau\sigma=\sigma\tau$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție și mulțimea $H=\{T\in\mathbb{R}\mid f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $T\in H$, atunci $-T\in H$.

5p **b)** Să se demonstreze că H este subgrup al grupului $(\mathbb{R},+)$.

5p **c)** Să se determine mulțimea H pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$.

Soluții

1. a) $m(\sigma)=4$.

b) $\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}$; $\sigma^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}$;

$\sigma^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}$; $\sigma^5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=e$.

Rezultă $A=\{e;\sigma;\sigma^2;\sigma^3;\sigma^4\}$. Deci A are 5 elemente.

c) $\tau\sigma^2=\sigma^2\tau\Rightarrow\tau\sigma^4=\sigma^4\tau$, de unde $\tau\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\tau$, adică $\tau\sigma=\sigma\tau$.

2. a) $T\in H$, deci $f(x+T)=f(x)$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$; în această egalitate înlocuind x cu $x-T$ obținem că $f(x)=f(x-T)=f(f((x+(-T))$ $(\forall)x\in\mathbb{R};-T\in H$.

b) Conform punctului **a)**, $(\forall)T\in H$, avem $-T\in H$ (1).

$(\forall)T,\ U\in H$, avem $f(x+(T+U))=f(x+T+U)=f(x+T)=f(x)$, deci $T+U\in H$ (2). Din (1) și (2) rezultă că H subgrup al lui (ℝ, +).

c) Din $f(T)=f(0)=0$, rezultă $T\in\mathbb{Z}$. Avem $f(x+T)=f(x)$, $\forall T\in\mathbb{Z}$. Astfel $H=\mathbb{Z}$.

VARIANTA 81

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ și punctele $A(m,1)$, $B(1-m,2)$, $C(2m+1,2m+1)$. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}m&1&1\\1-m&2&1\\2m+1&2m+1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(M)$.

5p **b)** Să se arate că punctele A, B, C nu sunt coliniare, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că aria triunghiului ABC este mai mare sau egală cu $\frac{15}{32}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Să se dea un exemplu de matrice nenulă din mulțimea A care are determinantul $\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\-\hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\-\hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}$.

Soluții

1. a) $\det(M)=\begin{vmatrix}m&1&1\\1-m&2&1\\2m+1&2m+1&1\end{vmatrix}=-4m^2+m-1$.

b) $-4m^2+m-1=-(4m^2-m+1)\neq 0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

c) $|\det(M)|=\left(2m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\geqslant\frac{15}{16}$, rezultă $S_{ABC}\geqslant\frac{15}{32}$.

2. a) $M=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\-\hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\-\hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{3}&\hat{1}\\-\hat{1}&\hat{3}\end{pmatrix}=O_2$.

c) Dacă $X=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$, atunci $X^2=\begin{pmatrix}a^2-b^2&\hat{2}ab\\-\hat{2}ab&a^2-b^2\end{pmatrix}$. Avem $a^2,b^2\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{4}\}$.

Cum $a^2-b^2=\hat{2}$, atunci $a^2=\hat{1}$ și $b^2=\hat{4}$, adică $a\in\{\hat{1},\hat{4}\}$ și $b\in\{\hat{2},\hat{3}\}$. Cum $ab=\hat{3}$ rezultă soluțiile $X_1=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{3}\\-\hat{3}&\hat{1}\end{pmatrix}$ și $X_2=\begin{pmatrix}\hat{4}&\hat{2}\\-\hat{2}&\hat{4}\end{pmatrix}$.

VARIANTA 82

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali $\begin{cases} x+ay+(b+c)z=0 \\ x+by+(c+a)z=0 \\ x+cy+(a+b)z=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}$, sistemul admite soluții nenule.

5p **c)** Să se rezolve sistemul, știind că $a\neq b$ și $(1,1,1)$ este soluție a sistemului.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2\neq 0\right\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(G,\cdot)$ cu $f(x+iy)=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

Soluții

1. a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & a-c & c-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-b & b-a \\ a-c & c-a \end{vmatrix}=0$.

b) Cum $\det A=0$, sistemul admite soluții nenule, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

c) Rangul matricei sistemului este egal cu 2; z este necunoscută secundară, $z=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, rezultă $y=\lambda$, $x=-(a+b+c)\lambda$; $(1,1,1)$ fiind soluție a sistemului implică $a+b+c=-1$, deci soluțiile sistemului sunt $(\lambda,\lambda,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

2. a) Notăm $A_{x,y}=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$. Avem $A_{x_1,y_1}\cdot A_{x_2,y_2}=\begin{pmatrix} x_1x_2-y_1y_2 & i(x_1y_2+x_2y_1) \\ i(x_1y_2+x_2y_1) & x_1x_2-y_1y_2 \end{pmatrix}$;

$(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\neq 0\Rightarrow A_{x_1,y_1}\cdot A_{x_2,y_2}\in G$.

b) Comutativitatea este consecință a punctului **a)**, iar asociativitatea este proprietate generală a înmulțirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elementul neutru este matricea $A_{1,0}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inversa matricei $A_{x,y}$ este $A_{x',y'}=\begin{pmatrix} x' & iy' \\ iy' & x' \end{pmatrix}$, cu $x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ și $y'=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

c) $f(x_1+iy_1)\cdot f(x_2+iy_2)=\begin{pmatrix} x_1 & iy_1 \\ iy_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & iy_2 \\ iy_2 & x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1x_2-y_1y_2 & i(x_1y_2+y_1x_2) \\ i(y_1x_2+x_1y_2) & x_1x_2-y_1y_2 \end{pmatrix}=$

$=f((x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2))=f((x_1+iy_1)(x_2+y_2))$, deci f este morfism, iar bijectivitatea este evidentă.

VARIANTA 83

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+(m^2-m-1)y+(m+1)z=2 \\ 2x+(m^2-m-2)y+2(m+1)z=3 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $m\in\{0,1\}$ sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că, dacă $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0-y_0+2009\cdot z_0=1$.

2. Se consideră mulțimile $H=\{a^2\,|\,a\in\mathbb{Z}_7\}$ și $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Z}_7, a\neq\hat{0}\text{ sau }b\neq\hat{0}\right\}$.

5p **a)** Să se determine elementele mulțimii H.

5p **b)** Fie $x,y\in H$ astfel încât $x+y=\hat{0}$. Să se arate că $x=y=\hat{0}$.

5p **c)** Să se arate că G este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

Soluții

1. a) Notând cu A matricea sistemului, rezultă $\det A=m^2(m-1)$. Sistemul admite soluție unică dacă și numai dacă $\det A\neq 0$, adică $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

b) Dacă $m=0$, rezultă $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang}A=1$ și $\operatorname{rang}\overline{A}=2$.

Pentru $m=1$ rezultă $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang}A=2$ și $\operatorname{rang}\overline{A}=3$.

Deci pentru $m\in\{0;1\}$ sistemul este incompatibil.

c) Fie $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ o soluție a sistemului; atunci $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Scăzând a doua ecuație a sistemului din a treia, rezultă că $x_0-y_0+(m+1)z_0=1$. Din prima ecuație, știind că $x_0-y_0+z_0=1$, rezultă $mz_0=0$, deci $z_0=0$; $x_0-y_0=1$, deci avem $x_0-y_0+2009z_0=1$.

2. a) $\hat{0}^2=\hat{0}, \hat{1}^2=\hat{1}, \hat{2}^2=\hat{4}, \hat{3}^2=\hat{2}, \hat{4}^2=\hat{2}, \hat{5}^2=\hat{4}, \hat{6}^2=\hat{1}$, deci $H=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}$.

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{1}$

b) Scriem tabla adunării elementelor din H. Din tabla adunării, rezultă că, dacă $x,y\in H$ astfel încât $x+y=\hat{0}$, atunci $x=y=\hat{0}$.

c) Fie $A,B\in G, A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$;

$AB=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax-by & -(ay+bx) \\ bx+ay & -by+ax \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & -t \\ t & z \end{pmatrix}$, $z\neq 0$ sau $t\neq 0$ deoarece $a\neq\hat{0}$ sau $b\neq\hat{0}$ şi $x\neq\hat{0}$ sau $y\neq\hat{0}$. Deci $A\cdot B\in G$.

Asociativitatea este proprietate generală a înmulţirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$, iar comutativitatea rezultă prin calcul direct. Elementul neutru este $I_2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$. Dacă $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in G$, condiţia $a\neq\hat{0}$ sau $b\neq\hat{0}$ este echivalentă cu $\det A\neq\hat{0}$. Inversa matricei $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in G$ este $A^{-1}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, cu $c=(\det A)^{-1}\cdot a$ şi $d=(\det A)^{-1}\cdot(-b)$.

VARIANTA 84

1. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x-y+z=m \\ nx+y-2z=4 \end{cases}$, unde $m,n\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine m şi n pentru care sistemul admite soluţia $x_0=2, y_0=2, z_0=1$.

5p **b)** Să se determine $n\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.

5p **c)** Să se determine m şi n pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}_3\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul de elemente ale mulţimii G.

5p **b)** Să se arate că G este grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se arate că $X^3=I_3$, oricare ar fi $X\in G$.

Soluţii

1. a) Se înlocuiesc $x_0=2, y_0=2, z_0=1$ în ecuaţiile sistemului;
$4-2+1=m$, de unde $m=3$ şi $2n+2-2=4$, de unde $n=2$.

b) Sistemul admite soluţie unică dacă determinantul matricei sistemului este nenul.

$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ n & 1 & 2 \end{vmatrix}=3-n$. Rezultă că $n\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

c) Dacă $n\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, sistemul este compatibil determinat. Este necesar atunci ca $n=3$. Pentru $n=3$ rangul matricei sistemului este 2. Cum sistemul este compatibil, rangul matricei extinse trebuie să fie 2. Se obţine $m=1$.

2. a) Cum $a,b\in\mathbb{Z}_3=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}$, atunci mulţimea G are $3\cdot 3=9$ elemente.

b) G este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor

$\begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \hat{1} & c & d \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{1} & a+c & b+d \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}\in G$.

Înmulţirea matricelor fiind asociativă pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$, atunci este şi în G.

Elementul neutru este I_3. Inversa matricei $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in G$ este

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{1} & -a & -b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in G.$$

Atunci G este grup în raport cu înmulțirea matricelor din $M_3(\mathbb{Z}_3)$.

c) $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & 2a & 2b\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$, iar $X^3=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=I_3$.

VARIANTA 85

1. Fie A matricea coeficienților sistemului $\begin{cases}2x+y+z=0\\ 3x-y+mz=0\\ -x+2y+z=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluții nenule.

5p **c)** Să se arate că, dacă $m=0$, atunci expresia $\dfrac{z_0^2+y_0^2+x_0^2}{z_0^2-y_0^2-x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluție nenulă (x_0,y_0,z_0) a sistemului.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^4-4X^3+6X^2+aX+b$, care are rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4.

5p **a)** Să se determine a și b știind că f are rădăcina i.

5p **b)** Să se calculeze $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2$.

5p **c)** Să se determine valorile reale ale numerelor a și b știind că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

Soluții

1. a) $\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & m\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1-2c_2\\ c_3-c_2}}{=}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 5 & -1 & m+1\\ -5 & 2 & -1\end{vmatrix}=-(-5+5m+5)=-5m$.

b) Sistemul admite soluții nenule dacă determinantul matricei sistemului este nul.

$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & m\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-5m$. Rezultă că $m=0$.

c) Orice soluție nenulă a sistemului este de forma $x=\lambda$, $y=3\lambda$, $z=-5\lambda$.

$\dfrac{z_0^2+y_0^2+x_0^2}{z_0^2-y_0^2-x_0^2}=\dfrac{25\lambda^2+9\lambda^2+\lambda^2}{25\lambda^2-9\lambda^2-\lambda^2}=\dfrac{35\lambda^2}{15\lambda^2}=\dfrac{7}{3}$.

2. a) $f(i)=0$; $1+4i-6+ai+b=0$; $(a+4)i+b-5=0$. Rezultă $a=-4$ și $b=5$.

b) Conform relațiilor lui Viète avem $s_1=x_1+x_2+x_3+x_4=4$ și $s_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+$ $+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=6$. Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=s_1^2-2s_2=16-12=4$.

Atunci $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2=$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2(x_1+x_2+x_3+x_4)+4=4-2\cdot4+4=0$.

c) Dacă x_i, $i=\overline{1,4}$ sunt reale, atunci din **b)** rezultă că $(x_1-1)^2=0$; $(x_2-1)^2=0$; $(x_3-1)^2=0$ și $(x_4-1)^2=0$, de unde $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Atunci $f(1)=f'(1)=f''(1)=f^{(3)}(1)=0$.

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x+a$; $f'(1)=0$; $4-12+12+a=0$, de unde $a=-4$.

$f(1)=0$; $1-4+6-4+b=0$, de unde $b=1$.

VARIANTA 86

1. Se consideră sistemul. $\begin{cases} x+ay+(a+b)z=a+b \\ x+a^2y+(a^2+b^2)z=a^2+b^2 \\ x+a^3y+(a^3+b^3)z=a^3+b^3 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice valori rele ale parametrilor a și b sistemul are soluție.

2. Se consideră polinomul $f=\hat{2}X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_4[X]$.

5p **a)** Să se determine gradul polinomului f^2.

5p **b)** Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X],+,\cdot)$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $g\in\mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2=\hat{1}$.

Soluții

1. a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a+b \\ 1 & a^2 & a^2+b^2 \\ 1 & a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-L_1\\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b \\ 0 & a(a-1) & a(a-1)+b(b-1) \\ 0 & a(a^2-1) & a(a^2-1)+b(b^2-1) \end{vmatrix} =$

$= a(a-1)\begin{vmatrix} 1 & a(a-1)+b(b-1) \\ a+1 & a(a^2-1)+b(b^2-1) \end{vmatrix} =$

$= a(a-1)[a(a^2-1)+b(b^2-1)-a(a^2-1)-b(b-1)(a+1)] = a(a-1)b(b-1)(b-a) =$

$= ab(a-1)(b-1)(b-a)$.

b) Fie A matricea sistemului. Cum determinantul său este $\Delta=ab(b-a)(a-1)(b-1)$, atunci sistemul este compatibil determinat dacă $\Delta\neq 0$, deci rezultă că $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $a\neq b$.

c) Știm că $\operatorname{rang}A\leqslant\operatorname{rang}\overline{A}$. Coloana termenilor liberi este aceeași cu a treia coloană a matricei sistemului, deci orice minor al matricei extinse este și minor al matricei sistemului. Ca urmare, $\operatorname{rang}\overline{A}\leqslant\operatorname{rang}A$, deci $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\overline{A}$. Rezultă că sistemul este compatibil.

2. a) $f^2=(\hat{2}X+\hat{1})^2=\hat{0}X^2+\hat{0}X+\hat{1}=\hat{1}$ deci $\operatorname{grad}f=0$.

b) Din **a)** $f^2=f\cdot f=\hat{1}$. Rezultă că f este inversabil în $(\mathbb{Z}_4[X],+,\cdot)$ și $f^{-1}=f$.

c) Dacă $g\in\mathbb{Z}_4[X]$, $g=aX+b$, $a\neq\hat{0}$ atunci $g^2=a^2X^2+\hat{2}abX+b^2$. Cum $g^2=\hat{1}$, atunci $a^2=\hat{0}$, $\hat{2}ab=\hat{0}$ și $b^2=\hat{1}$.

$a^2=\hat{0}$ și $a\neq\hat{0}$, atunci $a=\hat{2}$ (care verifică și $\hat{2}ab=\hat{0}$)

$b^2=\hat{1}$, atunci $b=\hat{1}$ sau $b=\hat{3}$. Rezultă două polinoame $g_1=\hat{2}X+\hat{1}$ și $g_2=\hat{2}X+\hat{3}$.

VARIANTA 87

1. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=3A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(I_3+A^3)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $AB=BA$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană a lui B este aceeași.

2. Fie $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\mathbb{Q}(\varepsilon)=\{a+b\varepsilon\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $\varepsilon^2\in\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **b)** Să se demonstreze că inversul oricărui element nenul din $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ aparține mulțimii $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea $M=\{a^2-ab+b^2\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea.

Soluții

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1+1&1+1+1&1+1+1\\1+1+1&1+1+1&1+1+1\\1+1+1&1+1+1&1+1+1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=3A$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}$; $A^3+I_3=\begin{pmatrix}10&9&9\\9&10&9\\9&9&10\end{pmatrix}$; $\det(A+I_3)=28$.

c) Fie $B=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$. Avem $AB=\begin{pmatrix}a_1+b_1+c_1&a_2+b_2+c_2&a_3+b_3+c_3\\a_1+b_1+c_1&a_2+b_2+c_2&a_3+b_3+c_3\\a_1+b_1+c_1&a_2+b_2+c_2&a_3+b_3+c_3\end{pmatrix}$;

$BA=\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3&a_1+a_2+a_3&a_1+a_2+a_3\\b_1+b_2+b_3&b_1+b_2+b_3&b_1+b_2+b_3\\c_1+c_2+c_3&c_1+c_2+c_3&c_1+c_2+c_3\end{pmatrix}$. Din $AB=BA$ rezultă că

$a_1+a_2+a_3=a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=a_3+b_3+c_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3$.

2. a) $\varepsilon^2=-1-\varepsilon\in\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

b) $(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)=a^2-ab+b^2\neq 0$, de unde rezultă că inversul lui $a+b\varepsilon$ este $\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}-\frac{b}{a^2-ab+b^2}\varepsilon\in\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

c) $(a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2)=|(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)|^2=x^2-xy+y^2$, unde $x=ac-bd\in\mathbb{Z}$ și $y=ad+bc-bd\in\mathbb{Z}$.

VARIANTA 88

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & m & -1\\ 3m+4 & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matrice A să fie inversabilă.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^{-1}=A^*$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ şi polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^3-X$, $g=X^3+\hat{2}X+\hat{2}$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f.

5p **b)** Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $h\in\mathbb{Z}_3[X]$ de gradul trei, astfel încât $h(x)=g(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_3$.

Soluţii

1. a) $\det(A)=3m^2+m-1$.

b) $\det(A)\neq 0$ dacă şi numai dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}\right\}$.

c) $A^{-1}=A^*$, adică $\det(A)=1\Leftrightarrow 3m^2+m-2=0$, de unde obţinem $m\in\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$.

2. a) Rădăcinile polinomului f sunt $\hat{0},\hat{1},\hat{2}$.

b) $g(\hat{0})=g(\hat{1})=g(\hat{2})=\hat{2}\neq\hat{0}$. Gradul lui g este 3 şi rezultă concluzia.

c) $h(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{Z}_3\Leftrightarrow(h-g)\vdots(X^3-X)$, adică $h=(X^3-X)\cdot c+g$ cu $c\in\{\hat{0},\hat{1}\}$, de unde $h=\hat{2}X^3+X+\hat{2}$, sau $h=g$.

VARIANTA 89

1. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases}x_1-x_2=a\\ x_3-x_4=b\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1\end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice valori ale lui a şi b, sistemul este compatibil,

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluţie (x_1,x_2,x_3,x_4) cu proprietatea că x_1,x_2,x_3,x_4 şi x_1+x_2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă sistemul are o soluţie cu toate componentele strict pozitive, atunci $a+b<1$.

2. Fie polinomul $f=X^3-3X^2+5X+1\in\mathbb{R}[X]$ şi $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se calculeze $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$.

Soluţii

1. a) Fie A matricea sistemului: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Obţinem $\operatorname{rang}A=3$.

$\operatorname{rang}\overline{A}=3=\operatorname{rang}A$, deci sistemul este compatibil.

b) Rezolvând sistemul $\begin{cases}x_1-x_2=a\\ x_3=b+\lambda\\ x_1+x_2+x_3=1-\lambda\end{cases}$, unde $x_4=\lambda\in\mathbb{R}$, obţinem soluţiile:

$x_1=\frac{1+a-b-2\lambda}{2}$, $x_2=\frac{1-a-b-2\lambda}{2}$, $x_3=b+\lambda$, $x_4=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

x_1,x_2,x_3,x_4 şi x_1+x_2 sunt în progresie aritmetică dacă $x_2=x_1+r$, $x_3=x_1+2r$, $x_4=x_1+3r$, $x_1+x_2=x_1+4r$. Obţinem $a=b=-\frac{1}{18}$.

c) Dacă $x_4>0$, atunci $\lambda>0$; dacă $x_2>0$, atunci $1-a-b-2\lambda>0$; $1-a-b>2\lambda>0\Rightarrow a+b<1$.

2. a) x_1, x_2, x_3 rădăcini pentru f, atunci $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$.

Rezultă că $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=4$.

b) Dacă f ar avea rădăcini întregi, atunci acestea s-ar găsi printre divizorii lui 1, adică ar fi 1 sau -1. Dar $f(1)=4$ şi $f(-1)=-1-3-5+1=-8$. Deci f nu are rădăcini întregi.

c) Conform relaţiilor lui Viète avem: $x_1+x_2+x_3=3$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=5$, atunci

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=9-10=-1$.

x_1, x_2 x_3 rădăcini pentru f, atunci $x_1^3=3x_1^2-5x_1-1$, $x_2^3=3x_2^2-5x_2-1$,

$x_3^3=3x_3^2-5x_3-1$.

Adunând relaţiile obţinem

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-5(x_1+x_2+x_3)-3=-3-15-3=-21$.

Dar $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2=$

$=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=-3+21=18$.

VARIANTA 90

1. Fie M mulţimea matricelor de ordin 3 cu elemente reale având proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este 0.

5p **a)** Să se arate că, dacă $A,B\in M$, atunci $A+B\in M$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din M este neinversabilă.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $A\in M$, atunci $A^2\in M$.

2. Se consideră inelele $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ şi $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $x\in\mathbb{R}$ şi $x^2=3+2\sqrt{2}$, atunci $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

5p **b)** Să se arate că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\cap\mathbb{Z}[\sqrt{3}]=\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există morfisme de inele de la $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ la $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Soluţii

1. a) $\sum_{j=1}^{3}(a_{ij}+b_{ij})=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}+\sum_{j=1}^{3}b_{ij}=0,\ \forall i\in\{1,2,3\}$.

b) Dacă $A\in M$ rezultă $\det(A)=0$.

c) Fie $A=(a_{ij})\in M$ şi $A^2=(c_{ij})$, $c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}a_{kj}$. Pentru orice $i\in\{1,2,3\}$ avem

$$c_{i1}+c_{i2}+c_{i3}=\sum_{k=1}^{3}(a_{ik}a_{k1}+a_{ik}a_{k2}+a_{ik}a_{k3})=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}(a_{k1}+a_{k2}+a_{k3})=0.$$

2. a) $x_{1,2}=\pm(1+\sqrt{2})$ care aparţine $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

b) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, rezultă că $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\cap\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Fie $x=a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{3}$ cu $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Avem $b\sqrt{2}-d\sqrt{3}\in\mathbb{Z}$ şi, prin ridicare la pătrat, rezultă $bd\sqrt{6}\in\mathbb{Z}$, de unde $bd=0$. Deci $b=0$ sau $d=0$, de unde $x\in\mathbb{Z}$.

c) Presupunem că există $f:\mathbb{Z}\sqrt{2}\to\mathbb{Z}\sqrt{3}$ morfism de inele.

$f(1)=1$ rezultă că $f(2)=f(1)+f(1)=2$. Atunci $2=f(\sqrt{2}^2)=f^2(\sqrt{2})$, deci $f(\sqrt{2})=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

VARIANTA 91

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 4\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ știind că $A^2=5A$.

5p **b)** Pentru $x=2$ să se calculeze A^{2009}.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\operatorname{rang}(A+A^t)=1$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=2X^4+2(a-1)X^3+(a^2+3)X^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c, știind că $a=b=c$, iar restul împărțirii lui f la $X+1$ este 10.

5p **b)** Știind că $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f, să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

5p **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ și rădăcinile polinomului f în cazul în care f are toate rădăcinile reale.

Soluții

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}1+2x & 10\\ 5x & 2x+16\end{pmatrix}$. Din $A^2=5A=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 5x & 20\end{pmatrix}$, rezultă că $2x+1=5$, de unde $x=2$, care verifică și $2x+16=20$.

b) Din **a)** avem că $A^2=5A$. Vom demonstra prin inducție că $A^n=5^{n-1}A$. Pentru $n=2$, egalitatea este verificată. Presupunem că $A^n=5^{n-1}A$ și arătăm că $A^{n+1}=5^nA$.

$A^{n+1}=A^n\cdot A=5^{n-1}\cdot A\cdot A=5^{n-1}A^2=5^{n-1}\cdot 5A=5^nA$. Deci $A^{2009}=5^{2008}A$.

c) $A^t=\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $A+A^t=\begin{pmatrix}2 & x+2\\ x+2 & 8\end{pmatrix}$; $\operatorname{rang}(A+A^t)=1$, dacă $\det(A+A^t)=0$ adică $16-(x+2)^2=0$. $(x+2)^2=16$, $x+2\in\{-4;4\}$, de unde $x=\{-6;2\}$.

2. a) Restul împărțirii lui f prin $X+1$ este $f(-1)$.

Dacă $f(-1)=10$ și $a=b=c$, atunci $2-2(a-1)+a^2+3-a+a=10$;

$a^2-2a+2+5=10$; $a^2-2a-3=0$, de unde $a=b=c\in\{-1;3\}$.

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j$; $x_1+x_2+x_3+x_4=1-a$;

$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j=\frac{a^2+3}{2}$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(1-a)^2-(a^2+3)=-2a-2$.

c) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2=3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_i^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j=-a^2-6a-9$; f are toate rădăcinile reale, deci $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2\geqslant 0$, adică $-a^2-6a-9\geqslant 0$. Rezultă $a=-3$.

Egalitatea are loc dacă $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{1-a}{4}=1$; $a=-3$, $b=-8$, $c=2$.

VARIANTA 92

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid AXA^t=O_2\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in G$, atunci $X+Y\in G$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in G$, suma elementelor lui X este egală cu 0.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in G$ și $\det X=0$, atunci $X^n\in G$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-6X^3+18X^2-30X+25\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se arate că polinomul f se divide cu X^2-2X+5.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că rădăcinile polinomului f au același modul.

Soluții

1. a) Trebuie să arătăm că $A\cdot(X+Y)\cdot A^t=O_2$, pentru orice $X,Y\in G$;

$A\cdot(X+Y)\cdot A^t=A\cdot X\cdot A^t+A\cdot Y\cdot A^t=O_2$, deci $X+Y\in G$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G$; atunci $A\cdot X\cdot A^t=(a+b+c+d)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

$A\cdot X\cdot A^t=O_2$, deci $a+b+c+d=0$.

c) Dacă $\det X=0$, avem $X^2=tX$, unde $t=\operatorname{Tr}(A)$. Prin inducție rezultă $X^n=t^{n-1}X$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$; $A\cdot X^n\cdot A^t=t^{n-1}(A\cdot X\cdot A^t)=O_2$, deci $X^n\in G$.

2. a) Efectuând împărțirea lui f la X^2-2X+5, va rezulta că restul este 0 și deci $f=(X^2-2X+5)(X^2-4X+5)$.

b) Cum $f=(X^2-2X+5)(X^2-4X+5)$, atunci rădăcinile reale ale lui f s-ar găsi printre rădăcinile reale ale lui X^2-2X+5 și X^2-4X+5.
Cum ecuațiile atașate celor două polinoame au discriminantul negativ, atunci nu există rădăcini reale nici pentru cele două polinoame și, deci, nici pentru f.

c) Fie $f(x)=0$, adică $(x^2-2x+5)(x^2-4x+5)=0$, adică $x^2-2x+5=0$ cu $x_{1,2}=1\pm 2i$ sau $x^2-4x+5=0$ cu $x_{3,4}=2\pm i$.

Toate cele 4 soluții au modulul egal cu $\sqrt{5}$.

VARIANTA 93

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se determine $\left(A\cdot A^t\right)^{-1}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=A,\ X\in M_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^{30}-3X^{20}+aX^{10}+3X^5+aX+b\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se arate că restul împărțirii polinomului f la $X+1$ nu depinde de a.

5p **b)** Să se determine a şi b astfel încât restul împărțirii polinomului f la X^2-X să fie X.

5p **c)** Să se determine a şi b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

Soluții

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}$.

b) $A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; $\det(A\cdot A^t)=5-4=1$; $(A\cdot A^t)^*=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

deci $(A\cdot A^t)^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

c) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; $X^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+dc & bc+d^2\end{pmatrix}$. Din $X^2=A$, obținem

$a^2+bc=1$ (1); $b(a+d)=0$ (2); $c(a+d)=2$ (3); $d^2+bc=1$ (4).

Din (2) şi (3) rezultă că $b=0$, de unde $a^2=d^2=1$, adică $a=d=1$ sau $a=d=-1$.

$a=-d$ ar contrazice (3).

Dacă $a=d=1$, atunci $c=1$, iar dacă $a=d=-1$, atunci $c=-1$.

Rezultă soluțiile $X_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $X_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

2. a) $f(-1)=b-5$.

b) $X^2-X=X(X-1)$. Deci $f=X(X-1)q+X$. Calculăm $f(1)$ si $f(0)$ în ambele forme ale lui f.

$\begin{cases}f(1)=1\\ f(0)=0\end{cases}$ şi $\begin{cases}f(1)=2a+b+1\\ f(0)=b\end{cases}$, deci $\begin{cases}2a+b+1=1\\ b=0\end{cases}$. Rezultă $\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$.

c) $(X-1)^2\mid f$ rezultă că $x=1$ este rădăcina dublă a lui f. Considerăm funcția polinomială ataşată polinomului $f(x)=x^{30}-3x^{20}+ax^{10}+3x^5+ax+b$.

$X=1$ este rădăcină dublă a ecuației, deci $f(1)=f'(1)=0$.

$f'(x)=30x^{29}-60x^{19}+10ax^9+15x^4+a$, $f'(1)=11a-15$.

Obținem sistemul: $\begin{cases}2a+b+1=0\\ 11a-15=0\end{cases}$ care are soluțiile $a=\frac{15}{11}$; $b=-\frac{41}{11}$.

VARIANTA 94

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că A este matrice inversabilă.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n & b^n-c^n \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze A^{-1}.

2. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f(X^2+3X+1)=f^2(X)+3f(X)+1$ şi $f(0)=0$.

5p **a)** Să se determine $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X-5$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f=X$.

Soluţii

1. a) $\det(A)=abc\neq 0$.

b) Se demonstrează prin inducţie după n.

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix} a^{-1} & a^{-1}-b^{-1} & a^{-1}-b^{-1} \\ 0 & b^{-1} & b^{-1}-c^{-1} \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$.

2. a) $f(-1)=f^2(-1)+3f(-1)+1$, $f^2(-1)+2f(-1)+1=0$; rezultă $[f(-1)+1]^2=0\Rightarrow f(-1)=-1$.

b) Punând $x=0$ obţinem $f(1)=1$. Pentru $x=1$: $f(5)=f^2(1)+3f(1)+1$.

Deci $f(5)=5$.

c) $f(0)=0$, deci $f(x)=xg(x)$. Înlocuind în relaţia iniţială obţinem:

$(x^2+3x+1)g(x^2+3x+1)=x^2g^2(x)+3xg(x)+1$ (*).

Pentru $x=0$ avem $g(1)=1$; pentru $x=1$ avem $g(5)=1$.

Consideram şirul $k_{n+1}=k_n{}^2+3k_n+1$, cu proprietatea: $k_1=0$.

Presupunem că $g(k_i)=1,\forall i=\overline{1...n}$. Arătăm că şi $g(k_{n+1})=1$.

În relaţia (*) facem $x=k_n$. Avem $(k_n^2+3k_n+1)g(k_n^2+3k_n+1)=k_n^2g^2(k_n)+3k_ng(k_n)+1$

$(k_n^2+3k_n+1)g(k_n^2+3k_n+1)=k_n^2+3k_n+1$, $g(k_n^2+3k_n+1)=1$, $g(k_{n+1})=1$.

Aşadar există o infinitate de valori k_n ale lui x pentru care $g(k_n)=1$, deci $g(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă $f(x)=x$.

VARIANTA 95

1. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$, matricea $A_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 şi restul elementelor egale cu 1.

5p **a)** Să se calculeze $\det(2A_2)$.

5p **b)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A_3+xI_3)=0$.

5p **c)** Să se arate că A_4 are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{4}{5}$ şi restul elementelor egale cu $-\frac{1}{5}$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^3-aX^2+bX-c\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine a,b,c pentru care $x_1=2$ şi $x_2=1+i$.

5p **b)** Să se arate că resturile împărţirii polinomul f la $(X-1)^2$ şi la $(X-2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a,b,c.

5p **c)** Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi a,b,c sunt strict pozitive, atunci x_1,x_2,x_3 sunt strict pozitive.

Soluţii

1. a) $A_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $2A_2=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\det(2A_2)=16-4=12$.

b) $A_3+xI_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 \end{pmatrix}$;

$\det(A_3+xI_3)=\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 \\ 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix}=(x+4)(x+1)^2$;

$(x+4)(x+1)^2=0$ dacă $x_1=-4$; $x_2=x_3=-1$.

Deci A_3+xI_3 este singulară pentru $x\in\{-4,-1\}$.

c) $A_4=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matricea $B=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ este inversa lui A_4 dacă $A_4\cdot B=I_4$.

$$B\cdot A_4=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4&1&1&1\\1&-4&1&1\\1&1&-4&1\\1&1&1&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-5&0&0&0\\0&-5&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}=I_4.$$

Aşadar, $B=A_4^{-1}$.

2. a) Cum f are coeficienţi reali rezultă că $x_1=2$, $x_2=1+i$, $x_3=1-i$. Ecuaţia de gradul trei care are aceste rădăcini este $x^3-S_1x^2+S_2x-S_3=0$, unde $S_1=x_1+x_2+x_3=4$, $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=6$, $S_3=x_1x_2x_3=4$. Avem $x^3-4x^2+6x-4=0$, deci $a=4$, $b=6$, $c=4$.

b) Împărţind pe f la $(X-1)^2=X^2-2X+1$ şi la $(X-2)^2=X^2-4X+4$ obţinem resturile: $(-2a+b+3)X+a-c-2$ şi $(-4a+b+12)X+4a-c-16$.

$(-2a+b+3)X+a-c-2=(-4a+b+12)X+4a-c-16$, dacă

$\begin{cases}-2a+b+3=-4a+b+12\\a-c-2=4a-c-16\end{cases}$. Rezultă $\begin{cases}a=\frac{9}{2}\\a=\frac{14}{3}\end{cases}$, imposibil. Deci cele două resturi nu pot fi egale.

c) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=a\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b\\x_1x_2x_3=c\end{cases}$. Cum $c>0$ rezultă că nici o rădăcină nu poate fi nulă.

Presupunem că toate rădăcinile sunt negative, atunci $x_1x_2x_3=c<0$ contradicţie cu ipoteza. Presupunem că $x_1<0$, $x_2<0$, $x_3>0$; avem

$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=a\Rightarrow x_3=a-(x_1+x_2)\\x_1x_2+x_3(x_1+x_2)=b\\x_1x_2x_3=c>0\end{cases}$, deci $x_1x_2+a(x_1+x_2)-(x_1+x_2)^2=b$,

$-x_1^2-x_1x_2-x_2^2+a(x_1+x_2)=b<0$, contradicţie cu ipoteza.

Presupunem $x_1<0$, $x_2>0$, $x_3>0$, de unde $x_1x_2x_3=c<0$, contradicţie cu ipoteza.

Aşadar, singura posibilitate în condiţiile date de problemă este că $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$.

VARIANTA 96

1. Pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se notează $\operatorname{tr}(A)=a+d$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2-\operatorname{tr}(A)A+(\det A)I_2=0_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $\operatorname{tr}(A)=0$, atunci $A^2B=BA^2$, pentru orice matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că dacă $\operatorname{tr}(A)\neq 0$, $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $A^2B=BA^2$, atunci $AB=BA$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-6X^3+13X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze suma pătratelor celor 4 rădăcini complexe ale polinomului f.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)(X-3)$.

5p **c)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă două rădăcini duble.

Soluţii

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{pmatrix}$; $\det A=ad-bc$;

$$A^2-Tr(A)\cdot A+\det A\cdot I_2=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{pmatrix}-(a+d)\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+(ad-bc)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=O_2$$

b) Din $Tr(A)=0$ avem $a=-d$, adică $A=\begin{pmatrix}-d&b\\c&d\end{pmatrix}$ şi

$A^2=\begin{pmatrix}d^2+bc&0\\0&bc+d^2\end{pmatrix}=(bc+d^2)I_2$. Deci $A^2B=(bc+d^2)B=BA^2$.

c) De la punctul a) avem: $A^2=\operatorname{tr}(A)\cdot A-\det A\cdot I_2$. Aşadar,

$A^2B=\operatorname{tr}(A)\cdot AB-\det A\cdot B$, iar $BA^2=\operatorname{tr}(A)\cdot BA-\det A\cdot B$.

Deci: $A^2B=BA^2$; $\operatorname{tr}(A)\cdot AB-\det A\cdot B=\operatorname{tr}(A)\cdot BA-\det A\cdot B\Rightarrow AB=BA$.

2. a) Conform relaţiilor lui Viète, avem $S_1=x_1+x_2+x_3+x_4=6$ şi

$S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=13$.

Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=S_1^2-2S_2=36-26=10$.

b) Punem condiţiile $f(1)=f(3)=0$ şi obţinem sistemul $\begin{cases}a+b=-8\\3a+b=-36\end{cases}$ care are soluţiile $a=-14$ şi $b=6$.

c) Fie α şi β cele două rădăcini duble. Din $X^4-6X^3+13X^2+aX+b=$
$=(X-\alpha)^2(X-\beta)^2$, prin identificarea coeficienţilor, obţinem sistemul:
$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta=13\\ -2\alpha\beta(\alpha+\beta)=a\\ (\alpha\beta)^2=b\end{cases}$. Observăm că primele două ecuaţii sunt independente de ultimele două. Rezolvând sistemul simetric format din primele două ecuaţii obţinem $\alpha=1;\ \beta=2$, de unde $a=-12;\ b=4$.

VARIANTA 97

1. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A\cdot A^t)\geq 0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A\cdot A^t=A^t\cdot A$, atunci $(a-d)(b-c)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $(A-A^t)^{2009}=A-A^t$, atunci $|b-c|\in\{0,1\}$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ ecuaţia $\hat{2}x=\hat{3}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $p=\hat{2}X^2+\hat{4}\in\mathbb{Z}_7[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbb{Z}_7\to\mathbb{Z}_7$, $f(x)=\hat{2}x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7,+)$.

Soluţii

1. a) $\det(A\cdot A^t)=\det(A)\cdot\det(A^t)=\det^2(A)\geq 0$.

b) $A\cdot A^t=A^t\cdot A\Leftrightarrow ac+bd=ab+cd\Leftrightarrow(a-d)(c-b)=0$.

c) $A-A^t=\begin{pmatrix}0 & b-c\\ c-b & 0\end{pmatrix}=(b-c)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

$(A-A^t)^{2008}=(b-c)^{2008}\cdot I_2$, rezultă $(A-A^t)^{2009}=(b-c)^{2008}\cdot(A-A^t)$, deci $A-A^t=O_2$ sau $(b-c)^{2008}=1$. Vom obţine $b-c\in\{0,1,-1\}$, deci $|b-c|\in\{0,1\}$.

2. a) $x=\hat{2}^{-1}\cdot\hat{3}=\hat{5}$.

b) $x^2\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}$, $\forall x\in\mathbb{Z}_7$, deci $\hat{2}x^2\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}$.

c) $f(x+y)=\hat{2}(x+y)=\hat{2}x+\hat{2}y=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}_7$.

$f(x)=f(y)\Rightarrow\hat{2}x=\hat{2}y$, rezultă $x=y$, deci f este injectivă. Cum $\mathbb{Z}_7$ este mulţime finită atunci f este surjectivă.

VARIANTA 98

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0+y_0+z_0=4$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{Z}^3$.

2. Fie $p\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^4-4X+p\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X+1$.

5p **b)** Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $p\in\mathbb{R}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Soluții

1. a) $A=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(A)=\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2m-2=0$, dacă $m=1$.

b) Pentru $m=1$ sistemul este incompatibil. Pentru $m\neq 1$ sistemul este compatibil și determinat, având soluția $\left(\frac{-1}{m-1},\ 1,\ \frac{-m}{m-1}\right)$; sistemul admite soluția (x_0,y_0,z_0) cu proprietatea $x_0+y_0+z_0=4$, dacă $\frac{-1}{m-1}+1+\frac{-m}{m-1}=4$, deci $m=\frac{1}{2}$.

c) Dacă $m\neq 1$, atunci sistemul este compatibil determinat, având soluția de forma $\left(\frac{-1}{m-1},1,\frac{-m}{m-1}\right)$. Cum $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{Z}^3$, atunci $m-1\mid -1$, de unde $m-1\in\{-1,1\}$, adică $m\in\{0,2\}$. Și $m-1\mid -m$, dar $m-1\mid m-1$, de unde rezultă $m-1\mid -1$.
În concluzie, $m\in\{0,2\}$.

2. a) Polinomul f este divizibil cu $X+1$ dacă $f(-1)=0$. $f(-1)=1+4+p$, de unde $p=-5$.

b) Dacă a este o rădăcină reală dublă pentru f, atunci $f(a)=f'(a)=0$; $f'(x)=4x^3-4$. Din $f'(a)=0$, obținem $4a^3-4=0$; $a^3-1=0$; $(a-1)(a^2+a+1)=0$. Cum $a\in\mathbb{R}$, atunci $a=1$. Din $f(1)=0$, obținem $1-4+p=0$, adică $p=3$.

c) Conform relațiilor lui Viete avem $S_1=x_1+x_2+x_3+x_4=0$ și $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0$.
Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=S_1^2-2S_2=0$. Rezultă că, dacă polinomul ar avea toate rădăcinile egale, acestea ar trebui să fie toate nule, adică. $f(0)=f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=0$. $f'(x)=4x^3-4$ și cum $f'(0)=-4$ ajungem la contradicție.

VARIANTA 99

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(AA^t+xB)$.

5p **a)** Să se calculeze AA^t.

5p **b)** Să se arate că $f(0)\geq 0$.

5p **c)** Să se arate că există $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=mx+n$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră mulțimea de numere complexe $G=\{\cos q\pi+i\sin q\pi \mid q\in\mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in G$.

5p **b)** Să se arate că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

5p **c)** Să se arate că polinomul $f=X^6-1\in\mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în G.

Soluții

1. a) $A^t=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; $AA^t=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+db & c^2+d^2 \end{pmatrix}$

b) $f(0)=\det(AA^t)=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=$
$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2abcd-b^2d^2=(ad-bc)^2\geq 0$.

c) $f(x)=\det(AA^t+xB)=\begin{vmatrix} a^2+b^2+x & ac+bd+x \\ ac+bd+x & c^2+d^2+x \end{vmatrix}=$
$(a^2+b^2+x)(c^2+d^2+x)-(ac+bd+x)^2=a^2c^2+a^2d^2+a^2x+b^2d^2+b^2c^2+$
$+b^2x+xc^2+xd^2+x^2-a^2c^2-b^2d^2-x^2-2acbd-2acx-2bdx=$
$=x(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd)+(ad-bc)^2$ de unde
$m=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd$ și $n=(ad-bc)^2$

2. a) $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, deci $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Rezultă că pentru $q=\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in G$.

b) Fie $x_1=\cos q_1\pi+i\sin q_1\pi$ și $x_2=\cos q_2\pi+i\sin q_2\pi$. Atunci $x_1\cdot x_2=\cos(q_1+q_2)\pi+i\sin(q_1+q_2)\pi$, deci $x_1\cdot x_2\in G$, de unde G este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

c) $X^6-1=(X^3-1)(X^3+1)=(X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$, de unde $x_1=1=\cos 0\pi+i\sin 0\pi$

$x_2 = -1 = \cos 1\pi + i \sin 1\pi$

$x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

$x_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$x_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$

$x_6 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Deci $x_1, x_2 \ldots x_6 \in G$.

VARIANTA 100

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p **b)** Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ și polinomul

$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$.

5p **a)** Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, dacă $f(2)$ și $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$, nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

Soluții

1. a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$. Avem $2A + A^2 = A$, deci $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

b) $A^{2k} = -A$, $A^{2k+1} = A$, pentru orice k natural și nenul.

c) $X^3 = A \Rightarrow \det(X^3) = \det(A)$, rezultă $\det(X) = 0$. Dacă $t = \operatorname{tr}(X)$, avem $X^3 = t^2 X$. Din $t^2 X = A \Rightarrow t^3 = -1$, deci $t = -1$. Deci $X = A$.

2. a) $\left.\begin{array}{l} f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n \end{array}\right\}$ Atunci $f(1) + f(-1) = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) \vdots 2$.

b) Dacă f are o rădăcină întreagă p, atunci $f(x) = (x - p) \cdot q(x)$. Dacă $f(2) = (2 - p)q(2)$ este impar atunci $2 - p$ impar. Dacă $f(3) = (3 - p) \cdot q(2)$ este impar, atunci $3 - p$ este impar.

$2 - p$ și $3 - p$ sunt numere întregi consecutive și ambele nu pot fi impare. Deci f nu poate avea rădăcini întregi.

c) Presupunem că g s-ar descompune în produs de două polinoame cu coeficienți întregi. Atunci gradul unuia dintre ele ar fi unu, iar rădăcina sa ar fi rațională, de forma $\frac{p}{q}$ cu $p \mid 1$ și $q \mid 1$; $(p; q) = 1$. Adică rădăcina ar fi -1 sau 1.

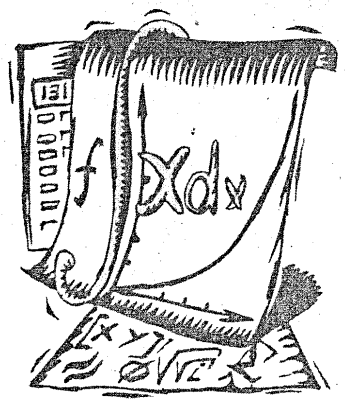
Dacă -1 este rădăcină, atunci $g(-1) = 0$, adică $3a + 1 = 0$, de unde $a = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Dacă 1 este rădăcină, atunci $g(1) = 0$, adică $3a + 1 = 0$, de unde $a = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Deci nu există o astfel de descompunere.

SUBIECTUL III

Capitolul conține a treia categorie de subiecte, reprezentând 100 de grupuri de itemi, pentru disciplina **Matematică**, proba **D**, tipul de programă de examen **MT1.**



Notă.

Varianta finală a unei probe scrise la examenul de bacalaureat se va stabili prin extragerea din urne a trei numere, de la 1 la 100. Acestea corespund numărului de ordine al grupului de itemi din fiecare categorie de subiecte. Astfel, varianta finală a unei probe scrise va fi formată din 3 grupuri de itemi de categorii diferite, marcate prin denumirea: Subiectul I, Subiectul II și Subiectul III. Ca punctaje, acestora le sunt atribuite câte 30 de puncte. Punctajul total al variantei de subiecte este de 100 de puncte, la cele 90 de puncte, cât însumează cele trei subiecte, adăugându-se 10 puncte din oficiu.

VARIANTA 1

1. Se consideră numărul real $a>0$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ax$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se determine $a\in(0,\infty)$ știind că $f(x)\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=\dfrac{1}{e}$ și $x=e$.

Soluții

1. a) $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-ax}{x}=-a$, $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+ax)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, deci $y=-ax$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

b) $f'(x)=e^x-a; f'(x)=0$, dacă $x=\ln a$.

x				$\ln a$			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$a(1-\ln a)$	$\nearrow$	$\nearrow$	

Deci $\ln a$ este punct de minim.

c) $f(0)=1, f(x)\geq 1, \forall x\in\mathbb{R}$, deci $f(x)\geq f(0), \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x=0$ punct de minim.
Conform teoremei lui Fermat avem $f'(0)=0$, adică $1-a=0$, $a=1$.

2. a) F derivabilă pe $(0,+\infty)$ și

$$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2)+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2+2)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=f(x), \forall x\in(0,+\infty).$$

b) Orice primitivă G a lui f este derivabilă și $G'(x)=f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\geqslant 0$, pentru $x\in[1,\infty)$.
Deci $G(x)$ este crescătoare pe $[1,\infty)$.

c) $\left.\begin{array}{l} f(x)\geq 0,\forall x\in[1,e] \\ f(x)<0,\forall x\in\left[\frac{1}{e},1\right)\end{array}\right\}$ deci $A_{\Gamma_f}=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}f(x)dx-\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx=$

$=2\sqrt{x}(\ln x-2)\Big|_{1}^{e}-2\sqrt{x}(\ln x-2)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}=-2\sqrt{e}+4+4-\frac{6}{\sqrt{e}}=8-2\sqrt{e}-\frac{6}{\sqrt{e}}$.

VARIANTA 2

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $a_1\in(0,1)$ şi $a_{n+1}=a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $a_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat de $b_n=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeţei delimitate de dreptele $x=0, x=1, Ox$ şi graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x+1)f(x)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}f(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţii

1. a) Fie $P(n):a_n\in(0,1),\forall n\in\mathbb{N}^*$. $P(1):a_1\in(0,1)$ „Adevărată" din ipoteză.

$P(k)\to P(k+1), k\in\mathbb{N}^*$. Presupunem $P(k)$ „Adevărată", adică $a_k\in(0,1)$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Demonstrăm că $P(k+1)$ „Adevărată", adică $a_{k+1}\in(0,1)$.

Dar $a_{k+1}=\underbrace{a_k}_{\in(0,1)}\underbrace{\left(1-\sqrt{a_k}\right)}_{\in(0,1)}\in(0,1)$. Rezultă $a_n\in(0,1),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) $a_{n+1}-a_n=-a_n\sqrt{a_n}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

c) Din relaţia de recurenţă avem că $a_n\sqrt{a_n}=a_n-a_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Din $a_n\in(0,1)$ rezultă $a_n^2\leq a_n\sqrt{a_n}=a_n-a_{n+1}$, adică $a_n^2\leq a_n-a_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Atribuind lui n valori obţinem n inegalităţi ca cea de mai sus, şi sumând aceste relaţii obţinem: $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\leq a_1-a_2+a_2-a_3+\ldots+a_n-a_{n+1}=a_1-a_{n+1}<a_1,\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit superior de a_1.

2. a) $F'(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{(2x+1)^2}{3}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{3+4x^2+4x+1}=\dfrac{4}{4(x^2+x+1)}=\dfrac{1}{x^2+x+1}=f(x)$.

Deci $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, adică F este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

b) $A=\int_0^1|g(x)|dx=\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1=\ln 3-\ln 1=\ln 3$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\frac{1}{x^2+x+1}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-n}^{n}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2n+1}{\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{-2n+1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$.

VARIANTA 3

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=18x^2-\ln x$.

5p **a)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)\geq a,\forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=\frac{1}{|x-a|+3}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, funcția f_a are primitive strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^3 f_2(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f_a(x)dx$.

Soluții

1. a) $f'(x)=36x-\frac{1}{x}=\frac{36x^2-1}{x},\forall x>0$. Avem $f'(x)\geq 0,\forall x\in\left[\frac{1}{6},+\infty\right)$, adică f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{6},+\infty\right)$; $f'(x)<0,\forall x\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$, deci f este descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{6}\right]$.

b) $f(x)\geq a,\forall x\in(0,+\infty)$; din punctul a) avem $f(x)\geq f\left(\frac{1}{6}\right),\forall x\in(0,+\infty)$.

Deci $f\left(\frac{1}{6}\right)\geq a\Rightarrow a\leq\frac{1}{2}+\ln 6$, deci $a\in\left(-\infty,\frac{1}{2}+\ln 6\right]$.

c) Dacă $m<\frac{1}{2}+\ln 6$, atunci ecuația $f(x)=m$ nu are rădăcini reale.

Dacă $m=\frac{1}{2}+\ln 6$, atunci ecuația $f(x)=\frac{1}{2}+\ln 6$ are $x=\frac{1}{6}$ rădăcină unică.

Dacă $m>\frac{1}{2}+\ln 6$, atunci ecuația $f(x)=m$ are rădăcinile: $x_1\in\left(0,\frac{1}{6}\right);x_2\in\left(\frac{1}{6},+\infty\right)$.

2. a) $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_a(x)=\frac{1}{|x-a|+3}$ funcție continuă pe $\mathbb{R}$, deci f_a admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie $F_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă; $F_a'(x)=f_a(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci F_a este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_0^3 f_2(x)dx=\int_0^3\frac{dx}{|x-2|+3}=\int_0^2\frac{dx}{5-x}+\int_2^3\frac{dx}{x+1}=-\ln|x-5|\Big|_0^2+\ln|x+1|\Big|_2^3=$

$=-\ln 3+\ln 5+\ln 4-\ln 3=\ln\frac{20}{9}$.

c) $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f_a(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\left(-\ln(a+3-x)\Big|_0^3\right)=\lim\limits_{a\to\infty}\left(\ln\frac{a+3}{a}\right)=\ln\left(\lim\limits_{a\to\infty}\frac{a+3}{a}\right)=\ln 1=0$.

VARIANTA 4

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f nu are puncte de extrem local.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, I_n=\int_1^2\dfrac{x^n}{x^n+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ și la $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\dfrac{-1}{0_+}=-\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\dfrac{-1}{0_+}=-\infty$, deci dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ și la dreapta spre $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\dfrac{1}{0_+}=\infty,\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\dfrac{1}{0_+}=\infty$, deci dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ și la dreapta spre ∞.

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$,

$$f'(x)=-2\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)=-2\cdot\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3}{x^3(x+1)^3}=\frac{-2(3x^2+3x+1)}{x^3(x+1)^3}.$$

Dacă $f'(x)=0$, atunci $3x^2+3x+1=0$. Cum $\Delta<0$, atunci $3x^2+3x+1>0$. Deci $f'(x)\neq0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$, de unde rezultă că funcția f nu poate avea puncte de extrem local.

c) Avem $f(k)=\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2}$, deci

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{-(n+1)^2}\right]^{\frac{-n^2}{(n+1)^2}}=\frac{1}{e}.$$

2. a) $I_1=\int_1^2\dfrac{x}{x+1}dx=\int_1^2\dfrac{x+1}{x+1}dx-\int_1^2\dfrac{1}{x+1}dx=x\Big|_1^2-\ln(x+1)\Big|_1^2=1-\ln3+\ln2$.

b) $I_n=\int_1^2\dfrac{x^n}{x^n+1}dx=\int_1^2\left(1-\dfrac{1}{x^n+1}\right)dx\le\int_1^2 1\,dx=1$.

c) $I_n=\int_1^2\left(1-\dfrac{1}{1+x^n}\right)dx=1-\int_1^2\dfrac{1}{1+x^n}dx$, iar

$0\le J_n=\int_1^2\dfrac{1}{1+x^n}dx\le\int_1^2\dfrac{1}{x^n}dx=\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$. Obținem $J_n\to0$ și $I_n\to1$.

VARIANTA 5

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $9y=2x$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $x>1$, atunci $\ln x\geq\frac{2(x-1)}{x+1}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

5p **a)** Să se arate că $f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(x)dx\leq f(k), \forall k\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx, n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x\cdot(x+1)^2}$, $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

b) $f'(x_0)=\frac{2}{9}$, deci $x_0=\frac{1}{2}$.

c) f este crescătoare și $f(1)=0$, deci $f(x)>0$ pentru $x>1$, adică $\ln x>\frac{2\cdot(x+1)}{x+1}$.

2. a) Din teorema de medie avem $\int_k^{k+1}f(x)dx=f(c), c\in(k,k+1)$;
f strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, deci $f(k+1)\leq f(c)\leq f(k)$.
Rezultă $f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(x)dx\leq f(k)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$.

c) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$, deci șirul este crescător.

Apoi $a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+$
$+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$. Cum a_n este evident pozitiv, deducem că $a_n\in(0,2)$, deci este mărginit. Deci a_n este monoton și mărginit și în concluzie, este convergent.

VARIANTA 6

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x\ln x}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=f(x)(1+\ln x), \forall x>0$.

5p **b)** Să se determine valoarea minimă a funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0;\infty)$.

2. Se consideră, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, funcțiile $f_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x}$ și $g_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, g_n(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2n-1}+f_n(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\leq\int_0^1 f_n(x)dx\leq\frac{1}{2n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right), n\in\mathbb{N}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=(x\ln x)'\cdot e^{x\ln x}=(\ln x+1)\cdot e^{x\ln x}$, deci $f'(x)=(1+\ln x)\cdot f(x)$.

b) $f'(x)=e^{x\ln x}(1+\ln x)$; $f'(x)=0$; $1+\ln x=0$, adică $\ln x=-1$, de unde $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$. Atunci funcția f are un minim egal cu $f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{1}{e}}$.

c) $f''(x)=\frac{1}{x}\cdot f(x)+(1+\ln x)\cdot f'(x)=\frac{1}{x}\cdot f(x)+(1+\ln x)\cdot(1+\ln x)\cdot f(x)$,
$f''(x)=\left[\frac{1}{x}+(1+\ln x)^2\right]\cdot f(x)>0, \forall x\in(0,+\infty)$, deci f convexă pe $(0,+\infty)$.

2. a) $\int_0^1 g_2(x)dx=\int_0^1\left(1-x+x^2-x^3+\frac{x^4}{1+x}\right)dx=$
$\int_0^1\left(1-x+x^2-x^3+x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$.

b) $0\leq f_n(x)\leq x^{2n}, \forall x\in[0,1)$, deci $0\leq\int_0^1 f_n(x)dx\leq\int_0^1 x^{2n}dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+1}$.

Rezultă $0\leq\int_0^1 f_n(x)dx\leq\frac{1}{2n+1}$.

c) Analog ca la punctual a) se demonstrează că $\int_0^1 g_n(x)dx=\ln 2$, dar
$\int_0^1 g_n(x)dx=\int_0^1\left[1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2n-1}+f_n(x)\right]dx=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+$
$+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\int_0^1 f_n(x)dx$. Din **b)** avem $0\leq\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\leq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$, deci
$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)-\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)=\ln 2$.

VARIANTA 7

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ și șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $k>0$, $\frac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k}$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător și are termenii pozitivi.

2. Se consideră funcțiile $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ și $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\operatorname{arctg}x$, unde a, b, c sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine a,b,c, astfel încât F să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se studieze monotonia funcției F, în cazul în care F este primitivă a funcției f.

Soluții

1. a) Cum $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln x=\infty$, atunci graficul funcției f nu admite asimptotă orizontală.

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$.

Atunci graficul funcției f nu admite nici asimptote oblice.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=-\infty$. Rezultă că dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta.

b) Aplicăm funcției f teorema lui Lagrange pe intervalul $[k,k+1], k\in\mathbb{N}^*$:

$f(k+1)-f(k)=\frac{1}{c}$, $c\in(k,k+1)$; $k<c<k+1$, deci $\frac{1}{k+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{k}$.

Rezultă $\frac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k}, \forall k>0$.

c) $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n<0$, dacă $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}$, adică $\ln e<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ adevărat, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este șir strict descrescător.

Din **b)** rezultă $\sum\limits_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $\ln(n+1)<x_n+\ln n$, adică $x_n>\ln\frac{n+1}{n}>0$, deci $(x_n)_{n\in N^*}$ are toți termenii pozitivi.

2. a) $F'(x)=f(x)$, dacă $\frac{a}{x+1}+\frac{2\cdot b\cdot x}{x^2+1}+\frac{c}{x^2+1}=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$.

Rezultă $a=-1, b=\frac{1}{2}, c=1$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=-\ln(x+1)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1+$

$+\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.

c) $F'(x)=f(x)>0$ pentru $x>0$, deci F este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

$F'(x)=f(x)<0$ pentru $x\in(-1;0]$, deci F este descrescătoare pe $(-1;0]$.

VARIANTA 8

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\cos x$ și șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_0=0$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $0\leqslant x_n\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la $\frac{\pi}{2}$.

2. Se consideră șirul de numere reale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit de $I_0=\frac{\pi}{2}$ și $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

5p **c)** Să se arate că $nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluții

1. a) $f'(x)=1-\sin x\geqslant 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Demonstrăm prin inducție matematică. Avem $x_0=0$.

Presupunem că $x_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $n\in\mathbb{N}$ și demonstrăm că $x_{n+1}=x_n+\cos x_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Studiind variația funcției f obținem:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +\ +\ +$		
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ avem $f(x)\in\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, deci $x_{n+1}=f(x_n)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Rezultă că $x_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strict crescător și mărginit rezultă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir convergent.

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\cos x_n)$, adică $l=l+\cos l$, de unde $l=\frac{\pi}{2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$.

2. a) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$.

b) Cum $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{n+1}x-\cos^n x)\,dx=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x(\cos x-1)\,dx\leqslant 0$, rezultă că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

c) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x(\sin x)'\,dx=\cos^{n-1}x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx=$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{n-2}x-\cos^n x)\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$.

Rezultă că $nI_n=(n-1)I_{n-2}$.

Dacă n este par, atunci $I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}I_0=\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{\pi}{2}$.

Dacă n este impar, atunci $I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot n}$.

Pentru n par avem $I_n\cdot I_{n-1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2n}$.

Pentru n impar avem $I_n\cdot I_{n-1}=\frac{\pi}{2n}$.

Rezultă că $n\cdot I_n\cdot I_{n-1}=\frac{\pi}{2}$.

VARIANTA 9

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare.

5p **b)** Admitem că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ ecuația $f(x)=n$ are o soluție unică x_n. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$, unde șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ a fost definit la **b)**.

2. Fie funcțiile $f,g_n:[0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1-x}, g_n(x)=\frac{x^n}{1-x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g_2(x))dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)dx\leq\frac{1}{2^n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}\right)=\ln 2$.

Soluții

1. a) Cum $f'(x)=1-\cos x\geq 0$, atunci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Din ipoteză rezultă că $x_n=\sin x_n+n$. Știm că $-1\leq\sin x_n\leq 1\ |+n\Rightarrow n-1\leq\sin x_n+n=x_n$. Se deduce că șirul $(x_n), n\in\mathbb{N}^*$, este nemărginit.

c) Conform punctului **b)**, $n-1\leq x_n\leq n+1\ |:n\Rightarrow\frac{n-1}{n}\leq\frac{x_n}{n}\leq\frac{n+1}{n}$, adică $\frac{x_n}{n}\in\left[\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n}\right]$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$ (criteriul cleștelui).

2. a) $\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g_2(x))dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^2}{1-x}\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)dx=x\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

b) $g_n'(x)=\frac{nx^{n-1}(1-x)+x^n}{(1-x)^2}>0,\ \forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Atunci funcția g_n este strict crescătoare pe $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Rezultă că pentru orice $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ avem $g_n(0)\leq g_n(x)\leq g_n\left(\frac{1}{2}\right)$. Integrând, obținem $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)\,dx\leq\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}dx$, adică $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)\,dx\leq\frac{1}{2^{n-1}}\cdot x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}$.

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}=\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g_n(x))dx=-\ln(1-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)\,dx=$

$=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln 1-\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)\,dx=\ln 2-\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)\,dx$; dar din **b)**, $\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)\,dx<\frac{1}{2^n}\to 0$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}\right)=\ln 2$.

VARIANTA 10

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f' este mărginită.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^{2n}}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\leq\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\operatorname{arctg}x-\frac{x}{x^2+1}$; $f''(x)=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\geq 0$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

b) Din $f''(x)\geq 0$ rezultă f' este crescătoare; $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\frac{\pi}{2}$.

c) Din $f'(0)=0$ și f' crescătoare pe $\mathbb{R}$ rezultă $f'(x)\leq 0, x<0$ și $f'(x)\geq 0, x>0$. Deducem că $x=0$ este punct de minim pentru f; $f(x)\geq f(0)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$.

b) $x\in[0;1]\Rightarrow 0\leq\frac{x^n}{1+x^{2n}}\leq x^n$. Integrăm inegalitățile anterioare și obținem

$0\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x^{2n}}dx\leq\int_0^1x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$.

c) Din **b)** avem $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}\to 0$, deci limita cerută este 0 (criteriul cleștelui).

VARIANTA 11

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x+2}e^{|x|}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, cu $m\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ și $g:(0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\displaystyle\int_x^1\frac{\sin t}{t}dt$. Se admite cunoscut faptul că $f(x)\geq 0, \forall x\geq 0$.

5p **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția g este strict descrescătoare.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)>0{,}9$.

Soluții

1. a) $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\frac{1}{x+2}\cdot e^{-x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{2e^{-x}-x-2}{2x(x+2)}\overset{l'H}{=}$

$=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{-2e^{-x}-1}{4x+4}=-\dfrac{3}{4}$ și $f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{2e^{x}-x-2}{2x(x+2)}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{2e^{x}-1}{4x+4}=\dfrac{1}{4}$, deci f nu e derivabilă în $x=0$.

b) $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2}, & x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\\ \dfrac{e^{x}(x+1)}{(x+2)^2}, & x\in(0,\infty)\end{cases}$; $f'(x)=0\Rightarrow x=-3$.

Se utilizează tabelul de variație al funcției f:

x	$-\infty$		-3		-2		0		∞
$f'(x)$	$+\ +\ +$	$+$	0	$-\ -$	$\|$	$-\ -\ -$	$\|$	$+\ +\ +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e^3$	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow\ \infty$

Observăm că $P(-3,-e^3)$ este punct de maxim, iar $Q\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ este punct de minim.

c) Se utilizează șirul lui Rolle: pentru $m<-e^3$ ecuația admite 2 rădăcini; pentru $m=-e^3$ admite o rădăcină ($x=-3$); pentru $m\in\left(-e^3,\dfrac{1}{2}\right)$ ecuația nu are nicio rădăcină; pentru $m=\dfrac{1}{2}$ admite o rădăcină ($x=0$); pentru $m>\dfrac{1}{2}$ admite 2 rădăcini.

2. a) $\displaystyle\int_0^1\left(\sin x-x+\frac{x^3}{6}\right)dx=\left(-\cos x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\Big|_0^1=\frac{13}{24}-\cos 1$.

b) $g'(x)=\dfrac{-\sin x}{x}<0$ pentru $\forall x\in(0;1]$. Rezultă că g este strict descrescătoare pe $(0;1]$.

c) Fie $L=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$. Din $f(t)\geq 0$ rezultă $\sin t\geq t-\dfrac{t^3}{6}\ \Big|:t,\ t>0$; obținem $\dfrac{\sin t}{t}\geq 1-\dfrac{t^2}{6}$.

Integrăm relația anterioară: $\displaystyle\int_x^1\frac{\sin t}{t}dt\geq\int_x^1\left(1-\frac{t^2}{6}\right)dt=\left(t-\frac{t^3}{18}\right)\Big|_x^1=\frac{x^3-18x+17}{18}$.

Obținem $L\geq\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x^3-18x+17}{18}=\dfrac{17}{18}>0{,}9$. Deci $L>0{,}9$.

VARIANTA 12

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

5p **a)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ unde

$x_n=f(1)+\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ este divergent.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(2)$.

5p **b)** Să se demonstreze relația $f(x)\leq\dfrac{1}{x}$, $\forall x>1$.

5p **c)** Să se demonstreze relația $f(x+1)=xf(x)-\dfrac{1}{e}, \forall x>1$.

Soluții

1. a) $x_n=\ln 2+\ln\dfrac{3}{2}+\ldots+\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

b) Folosind regula lui L'Hospital, găsim limita cerută egală cu 0.

c) Avem $f'(x)=\dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$. Fie $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$,

$g'(x)=-\ln(x+1)<0$, $\forall x>0$, deci $g(x)<g(0)=0$, $\forall x>0$, adică

$f'(x)<0$, $\forall x>0$, de unde f este descrescătoare.

2. a) $f(2)=\int_0^1 e^{-t}\cdot t\,dt=-\int_0^1(e^{-t})'\cdot t\,dt=-e^{-t}\cdot t\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-t}dt=1-\dfrac{2}{e}$.

b) Avem $f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt\leq\int_0^1 t^{x-1}dt=\dfrac{t^x}{x}\Big|_0^1=\dfrac{1}{x}$. Deci $f(x)\leq\dfrac{1}{x}$, $\forall x>1$.

c) $f(x+1)=\int_0^1(-e^{-t})'\cdot t^x dt=-e^{-t}\cdot t^x\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}dt=-\dfrac{1}{e}+x\cdot f(x), (\forall)x>1$.

VARIANTA 13

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică a graficului funcției f spre ∞.

5p **b)** Să se arate că $f^2(x)f'(x)=x^2+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

5p **c)** Să se determine derivatele laterale ale funcției în punctul $x_0=-2$.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $F_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt$, $x>0$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(x), x>0$.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} F_2(x)$.

Soluții

1. a) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=1$, deci $y=x+1$ este asimptota oblică spre ∞.

b) $f^3(x)=x^3+3x^2-4\neq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$;

$f^2(x)\cdot f'(x)=\dfrac{\left[f^3(x)\right]'}{3}=\dfrac{3x^2+6x}{3}=x^2+2x$.

c) $f'(x)=\dfrac{3x(x+2)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)^4}}=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}, x\neq 1, x\neq -2$.

$f_s'(-2)=\lim\limits_{x\nearrow -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\nearrow -2}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}-0}{x+2}=\lim\limits_{x\nearrow -2}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}=+\infty$;

$f_d'(-2)=\lim\limits_{x\searrow -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\searrow -2}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}=-\infty$.

2. a) $F_1(x)=\int_0^x(-e^{-t})'\cdot t\,dt=-e^{-t}\cdot t\Big|_0^x+\int_0^x e^{-t}dt==1-(x+1)\cdot e^{-x}$.

b) $F_n'(x)=x^n\cdot e^{-x}, x>0$; $F_n''(x)=n\cdot x^{n-1}\cdot e^{-x}-x^n\cdot e^{-x}=x^{n-1}\cdot e^{-x}(n-x), x>0$;

$x=n$ este punct de inflexiune.

c) Integrând succesiv prin părți, obținem $F_2(x)=\int_0^x t^2e^{-t}dt=\dfrac{-x^2}{e^x}-\dfrac{2x}{e^x}-\dfrac{2}{e^x}+2$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2}{e^x}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{e^x}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{e^x}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{e^x}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{e^x}=0$. Rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}F_2(x)=2$.

VARIANTA 14

Pentru $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\sin^n x$ și se notează cu x_n abscisa punctului de inflexiune din intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, al graficului funcției f_n.

5p **a)** Să se arate că $f_n''(x)=n(n-1)\sin^{n-2}x-n^2\sin^n x,\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$ și $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\sin x_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}},\ n\geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},\ F(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$$

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă pentru funcția f.

5p **b)** Pentru $a=2$, să se determine aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=2$.

5p **c)** Să se determine a astfel încât $\int_0^2 F(x)dx-\int_{-2}^0 F(x)dx=2$.

Soluții

1. a) $f_n'(x)=n\sin^{n-1}x\cos x;\ f_n''(x)=n\cdot\sin^{n-2}x\cdot((n-1)\cdot\cos^2x-\sin^2x)=$

$=n\cdot\sin^{n-2}x\cdot(n-1-n\sin^2x)$.

b) $f_n''(x_n)=0, x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ rezultă $\sin^2x_n=\frac{n-1}{n},\ \sin x_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

c) x_n este soluția ecuației $f_n''(x)=0$, cu condiția ca f_n'' să schimbe semnul în jurul anulării. Obținem $\sin^2x_n=\frac{n-1}{n}$, deci $L=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin x_n)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\sin x_n-1)^{\frac{1}{\sin x_n-1}}\right]^{n(\sin x_n-1)}=$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-1\right)\cdot n}=e^{-\frac{1}{2}}$.

2. a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (făcând compunere de funcții derivabile)

$$F'(x)=\frac{(2x+a)(x^2+1)-(x^3+ax^2+5x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

b) f este continuă pe $[1,2], f(x)=\frac{(x-1)^2\cdot(x+2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\geq 0$;

$$\text{Aria}=\int_1^2 f(x)dx=F(x)\Big|_1^2=\frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^2=\frac{13}{\sqrt{5}}-\frac{8}{\sqrt{2}}.$$

c) Cu schimbarea $t=-x$, a doua integrală devine $\int_{-2}^0 F(x)dx=\int_0^2 F(-t)dt$.

Relația din ipoteză devine $\int_0^2 F(x)dx-\int_0^2 F(-t)dt=2;\ \left[\int_0^2 F(x)-F(-x)\right]dx=2$,

$\int_0^2\frac{2ax}{\sqrt{x^2+1}}dx=2,\ a\cdot\sqrt{x^2+1}\Big|_0^2=1;\ a\sqrt{5}-a=1$. Rezultă că $a=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

VARIANTA 15

1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, se consideră funcția $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=x^n-nx+1$.

5p **a)** Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $[0;1]$ și strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f_n(x)=0,\ x>0$ are exact două rădăcini $a_n\in(0,1)$ și $b_n\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde a_n a fost definit la punctul **b)**.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ și $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $I_0=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $I_{2n}=\frac{1}{2n-1}-I_{2n-2},\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right)=I_0$.

Soluții

1. a) $f_n'(x)=n\cdot(x^{n-1}-1), x\geq 0;\ f_n'(1)=0; f_n'(x)<0$, pentru $x\in[0,1)$, deci este strict descrescătoare pe $[0;1)$; $f_n'(x)>0$, pentru $x>1$, deci este strict crescătoare pe $[1,+\infty)$.

b) f_n este continuă, strict descrescătoare pe $[0,1]$ și $f_n(0)\cdot f_n(1)<0$, deci f_n are o rădăcină în $(0,1)$; f_n este continuă, strict crescătoare pe $[1,\infty)$, $f_n(1)<0, \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=\infty$, deci f_n are o rădăcină în $(1,\infty)$.

c) $f_n(0)>0,\ f_n\left(\frac{2}{n}\right)<0,\ n\geq 3;\ a_n\in\left(0,\frac{2}{n}\right)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

2. a) $I_0=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

b) $I_{2n}+I_{2n-2}=\int_0^1\frac{x^{2n-2}\cdot(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^{2n-2}dx=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n-1}, n\geq 2$.

c) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$ (Leibnitz), deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)=\frac{\pi}{4}=I_0$.

VARIANTA 16

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este mărginită pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=(1-x)^n$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 xf_n(x)dx=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx$.

Soluții

1. a) f este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0\}$; $f_s'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$;

$f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0} x\sin\frac{1}{x^2}=0=f_s'(0)$. Rezultă că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Din **a)** avem $f'(0)=0$; $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Limita cerută este egală cu 0.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$. Atunci există $\alpha>0$ astfel încât $f(x)\in(0;1)$ pentru orice $x>\alpha$. Dar f este continuă pe $[0,\alpha]$, deci și mărginită pe $[0,\alpha]$. Rezultă că f este mărginită pe $[0,\infty)$ și cum f este pară, atunci f este mărginită pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\int_0^1 f_2(x)dx=\int_0^1(1-2x+x^2)dx=x\Big|_0^1-2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=1-1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

b) Cu substituția $1-x=t$ se obține

$\int_0^1 xf_n(x)dx=\int_0^1(1-t)\cdot t^n dt=\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

c) $\int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx=\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx=-\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\Big|_0^1=-\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\frac{n}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx=-1\cdot e^{-1}+1=1-\frac{1}{e}$.

VARIANTA 17

1. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_1\in(0,1)$ și $x_{n+1}=\frac{x_n^5+3x_n}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $x_n\in(0,1), \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}}{x_n}=\frac{9}{16}$.

2. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x)=\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^\pi x^2 f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\cos 1$.

Soluții

1. a) Șirul este evident pozitiv. Demonstrăm prin inducție că $x_n<1$. Presupunând că $x_k<1$ obținem $x_{k+1}=\frac{x_k^5+3x_k}{4}<\frac{1^5+3\cdot 1}{4}=1$.

b) $x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^5-x_n}{4}<0, x_n\in(0,1)$. Șirul fiind descrescător și mărginit este convergent.

c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent, deci fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$; avem $l=\frac{l^5+3l}{4}, l=l^5$, deci $l\in\{-1,0,1\}$. Deoarece șirul este descrescător și $x_n\in(0,1)$ avem $l=0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^4+3}{4}=\frac{3}{4}$. Din $\frac{x_{n+2}}{x_n}=\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}$ și relația anterioară se deduce că limita cerută este $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$.

2. a) Din ipoteză avem ca $x^2\cdot f(x)=x\cdot\sin x$, $x\in\mathbb{R}$;

$I=\int_0^\pi x\sin x dx=-\int_0^\pi(\cos x)' x dx$; $I=-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos x dx=\pi$.

b) Funcția $g(x)=f(x)$, $x\in I-\{0\}$, $g(0)=1$, $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ este continuă pe I, deci este integrabilă. Deoarece f diferă de g doar în punctul $x=0$, înseamnă că și funcția f este integrabilă pe I.

c) $\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin x}{1}, \forall x\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$; $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx<\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\cos 1$.

VARIANTA 18

1. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ și șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_0=2,\ x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 1.

5p **c)** Să se arate că șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n=x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n-n$, este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+\cos x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=x\cdot\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că F este funcție pară.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției F.

Soluții

1. a) Funcția f este continuă pe $[0,\infty)$, deci nu va avea asimptote verticale. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$, dreapta $y=2$ este asimptotă orizontală spre ∞. Având asimptotă orizontală, nu mai poate avea asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) Deoarece $f'(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0$ avem f strict crescătoare. Dacă $x_0=2$, $x_1=\dfrac{5}{4}<2$ și, presupunând $x_k>x_{k+1}$, avem că $x_{k+1}>x_{k+2}$, deoarece $f(x_k)>f(x_{k+1})$, deci $x_n>x_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow$ șirul este descrescător.

Avem $0<x_n\leqslant 2, \forall n\in\mathbb{N}$, deci șirul este convergent.

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l\geqslant 0$; avem $l=\dfrac{2l+1}{l+2}, l^2=1\Rightarrow l=1$.

c) $y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-1$. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător și are limita egală cu 1, deci $x_n\geqslant 1$. Obținem că șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător.

$x_n-1=f(x_{n-1})-1=\dfrac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}+2}\leqslant\dfrac{x_{n-1}-1}{2}$. Rezultă că $x_n-1\leqslant\dfrac{x_0-1}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}$. Atunci

$y_n\leqslant x_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-1)\leqslant 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}<3$, deci șirul este și mărginit superior, de unde rezultă convergența lui.

2. a) Avem $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}+1$.

b) $\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x(1+\cos t)\,dt=t\Big|_0^x+\sin t\Big|_0^x=x+\sin x$.

Rezultă că $F(x)=x^2+x\sin x$; $F(-x)=(-x)^2+(-x)\cdot\sin(-x)=x^2+x\sin x=F(x)$. Deci funcția F este pară.

c) Dacă $0\leqslant x_1<x_2\Rightarrow\int_0^{x_1} f(t)\,dt\leqslant\int_0^{x_2} f(t)\,dt$ căci f e pozitivă; deci F este crescătoare pe $[0,\infty)$. Deoarece F este funcție pară și crescătoare pe $[0,\infty)$, deducem că F este descrescătoare pe $(-\infty,0]$.

VARIANTA 19

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^a f\left(\frac{1}{x}\right)$, unde a este un număr real.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 (x+f(x)-2)^2\,dx$.

5p **c)** Știind că funcția f este bijectivă, să se calculeze $\int_{\frac{4}{5}}^{2} f^{-1}(x)\,dx$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\searrow -2} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=\infty$, deci $x=-2, x=2$ sunt asimptote verticale.

b) $f'(x)=\frac{4}{4-x^2}$; $f''(x)=\frac{8x}{(4-x^2)^2}$; $x=0$ punct de inflexiune.

c) $L=\lim\limits_{x\to\infty} x^a\cdot\ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{y\searrow 0}\frac{1}{y^a}\cdot\ln\frac{2+y}{2-y}=\lim\limits_{y\searrow 0}\frac{1}{y^a}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{2y}{2-y}\right)}{\frac{2y}{2-y}}\cdot\frac{2y}{2-y}=\lim\limits_{y\searrow 0}\frac{1}{y^{a-1}}$;

$L=\begin{cases}0, & a<1\\ 1, & a=1\\ \infty, & a>1\end{cases}$.

2. a) $I=\int_0^1\left(-x+2-\frac{x}{x^2+4}\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4)\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{5}$.

b) $I=\int_1^4\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx=\frac{-1}{2}\cdot\int_1^4\left(\frac{1}{x^2+4}\right)'\cdot x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{-x}{x^2+4}\Big|_1^4+\frac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_1^4=$

$=\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

c) Cu substituția $f^{-1}(x)=t\Rightarrow f(t)=x, dx=f'(t)\,dt$;

$I=\int_{\frac{4}{5}}^{2} f^{-1}(x)\,dx=-\int_0^1 t\cdot f'(t)\,dt=-t\cdot f(t)\Big|_0^1+\int_0^1 f(t)\,dt=-\frac{4}{5}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{5}=\frac{7}{10}+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{5}$.

VARIANTA 20

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2e^x+3x^2-2x+5$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(t)=\frac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 (t^3+1)f(t)dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)\,dt=\int_1^x t^3 f(t)\,dt$, $\forall x>0$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)\,dt$.

Soluții

1. a) f este derivabilă pe $[0,\infty)$, $f'(x)=2e^x+6x-2$; $f'(x)\geq 0, (\forall)x\geq 0$. Deci f este crescătoare pe $[0;+\infty)$.

b) $f(x)=2e^x+x^2-2x+1+2x^2+4=2e^x+(x-1)^2+2x^2+4$. Cum $f(x)>0$, atunci f nu este surjectivă.

c) $f'(x)=2e^x+6x-2$, de unde $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x+6x-2}{2e^x+3x^2-2x+5}=1$.

2. a) $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\operatorname{arctg}t\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

b) Făcând substituția $\frac{1}{t}=y$ avem $J=\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)\,dt=\int_x^1 f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{-1}{y^2}\right)dy=\int_1^x\frac{1}{t^2}\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)dt$,

deci $J=\int_1^x\frac{t^3}{(t^2+1)(t^3+1)}dt=\int_1^x t^3\cdot f(t)\,dt$.

c) $\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)\,dt=\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x t^3\cdot f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x(t^3+1)\cdot f(t)\,dt=$

$=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}1$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt=\frac{\pi}{4}$.

VARIANTA 21

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^4}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1, axele de coordonate și dreapta $x=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x\left(f_1(x)\right)^2 dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f_n(1)+f_n(2)+f_n(3)+\ldots+f_n(n)\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x}\cdot\dfrac{x-3}{x}\cdot\dfrac{x-5}{x}\cdot\dfrac{x-7}{x}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{x}}=e^0=1$.

c) Notând $x-4=y$, vom avea $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=$

$=(y+3)(y+1)(y-1)(y-3)=y^4-10y^2+9=(x-4)^4-10(x-4)^2+9$;

$f'(x)=4(x-4)^3-20(x-4)=4(x-4)\left(x^2-8x+11\right)$.

Ecuația $f'(x)=0$ are rădăcinile $x_1=4$, $x_2=4-\sqrt{5}$, $x_3=4+\sqrt{5}$.

2. a) $A=\int_0^1 f_1(x)dx=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$.

b) $I=\int_0^1\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(1+x^2\right)'\left(1+x^2\right)^{-2}dx=\dfrac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\Big|_0^1=\dfrac{1}{4}$.

c) $a_n=n\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+k^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{k^2}{n^2}}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$.

VARIANTA 22

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5p **c)** Să se arate că $\left|f(x)-f(y)\right|\leq|x-y|$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_2^3\dfrac{f(x)}{x-1}dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^0\dfrac{x^2-13}{f(x)}dx$.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^{x^2} f(t)e^t dt$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{-3x^4+3}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Din tabelul de variație al funcției f va rezulta că $\min f=-\dfrac{1}{4}$, $\max f=\dfrac{1}{4}$ și funcția este continuă. Deci $\operatorname{Im} f=\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right]$.

c) Dacă $x=y$, atunci inegalitatea este evidentă.

Dacă $x\neq y$, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $x<y$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[x, y]$. Va rezulta că există $c\in(x, y)$ astfel încât $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$. Dar $f'(x)=\dfrac{-3x^4+3}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$. Demonstrăm că

$f'(x)\leq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, adică $\dfrac{-3x^4+3}{\left(x^4+3\right)^2}\leq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^8+9x^4+6\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, inegalitate

evident adevărată și $f'(x)\geq -1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, adică $\dfrac{-3x^4+3}{\left(x^4+3\right)^2}\geq -1$, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$x^8+3x^4+12\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; notăm $x^4=y$ și avem $y^2+3y+12\geq 0$, $\forall y\geq 0$, inegalitate

adevărată. Din cele două relații rezultă că $|f'(c)|\le 1$, adică $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\le 1$, deci $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$.

2. a) $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1}dx=\int_2^3 \frac{x^3-x-2x+2}{x-1}dx=\int_2^3\left[\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}-\frac{2(x-1)}{x-1}\right]dx=$

$=\int_2^3(x^2+x)dx-2\int_2^3 dx=\frac{x^3}{3}\Big|_2^3+\frac{x^2}{2}\Big|_2^3-2x\Big|_2^3=9-\frac{8}{3}+\frac{9}{2}-2-6+4=\frac{41}{6}$.

b) Prin descompune în fracții simple obținem

$\int_{-1}^0 \frac{x^2-13}{x^2-3x+2}dx=\int_{-1}^0\left(\frac{2}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=-3\ln 2-2$.

c) $g'(x)=2x\cdot f(x^2)\cdot e^{x^2}=2x\cdot e^{x^2}\cdot(x^6-3x^2+2)=2x\cdot e^{x^2}\cdot(x^6-4x^2+x^2+2)=$

$=2xe^{x^2}\cdot[x^2(x^2-2)(x^2+2)+x^2+2]=2xe^{x^2}(x^2+2)(x^4-2x^2+1)=2xe^{x^2}(x^2+2)(x^2-1)^2$.

Dacă $g'(x)=0$, atunci $x\in\{0;-1;1\}$. Cum $e^{x^2}\ge 0$, $x^2+2\ge 0$ și $(x^2-1)^2\ge 0$, atunci $x=0$ este singurul punct de extrem al funcției g.

VARIANTA 23

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, ecuația $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$ are o unică soluție $x_n\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-1)$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}dt$.

5p **a)** Să se arate că $\int_0^a\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+a)$, $a>-1$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)<\ln(1+x),\forall x>0$.

5p **c)** Să se arate că $f(\pi)>f(2\pi)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=3x^2+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Funcția f este strict crescătoare, deci injectivă. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și f este continuă, deci f este și surjectivă. Va rezulta că ecuația $f(x)=y$ are soluție unică, $\forall y\in\mathbb{R}$.

b) Fie $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$. Avem $x_n^3+x_n+1=3+\frac{1}{n+1}$, adică $(x_n-1)\left(x_n^2+x_n+2\right)-\frac{1}{n+1}=0$ și, trecând la limită, obținem $l=1$.

c) Din $x_n-1=\frac{1}{(n+1)\left(x_n^2+x_n+2\right)}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{x_n^2+x_n+2}=\frac{1}{4}$.

2. a) $\int_0^a\frac{1}{1+t}dt=\ln|1+t|\Big|_0^a=\ln(a+1)$, $a>-1$.

b) $f'(x)=\frac{\sin x}{1+x}$. Considerăm funcția $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\ln(1+x)$.

Funcția g este derivabilă și $g'(x)=\frac{\sin x-1}{1+x}\le 0$, $\forall x\in[0,\infty)$. Înseamnă că g este descrescătoare și $g(x)<g(0)$, $\forall x>0$, deci $f(x)<\ln(1+x)$, $\forall x>0$.

c) Avem $f'(x)=\frac{\sin x}{1+x}$. Cum pe intervalul $[\pi;2\pi]$, $\sin x\le 0$, atunci $f'(x)\le 0$, $\forall x\in[\pi,2\pi]$, adică funcția f este descrescătoare pe $[\pi,2\pi]$, de unde $f(\pi)>f(2\pi)$.

VARIANTA 24

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției nu are asimptote.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f are primitive pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, să se arate că $0\leq\int_0^x f(t)\,dt<1,\ \forall x>0$.

Soluții

1. a) $f'(x)=1-\cos x\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că f este crescătoare.

b) Asimptote orizontale nu avem; $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(-\sin x)$ nu există. Atunci f nu are nici asimptote oblice.

c) g este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\dfrac{x-\sin x}{x^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}\in\mathbb{R}$.

Atunci g este derivabilă și în $x=0$, deci pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^{-2x}\left(e^x-1\right)}{x}=1=f(0)$, deci f este continuă în $x=0$. Funcția f este continuă pe intervalul $[0,\infty)$, deci va admite primitive pe acest interval.

b) $\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)dx=-e^{-x}\Big|_0^1+\dfrac{e^{-2x}}{2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2e^2}$.

c) $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\left(e^t-1\right)}{t}>0,\ \forall t\in(0,\infty)$ și $f(0)=1\Rightarrow f(t)>0,\ \forall t\in[0,\infty)$ și $\int_0^x f(t)\,dt>0,\ \forall x>0$.

Avem $e^{-t}\geq -t+1$, deci $1-e^{-t}\leq t$, iar $f(t)=\dfrac{e^{-t}\left(1-e^{-t}\right)}{t}$, de unde $f(t)\leq e^{-t},\ \forall t>0$.

Prin integrare obținem $\int_0^x f(t)\,dt\leq\int_0^x e^{-t}dt,\ \forall x>0\Rightarrow\int_0^x f(t)\,dt\leq-\dfrac{1}{e^x}+1<1,\ \forall x>0$.

VARIANTA 25

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$.

5p **a)** Să se arate că funcția este convexă pe intervalul $(0,e]$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 3}$, dat de $a_n=\dfrac{\ln 3}{3}+\dfrac{\ln 4}{4}+\dfrac{\ln 5}{5}+\ldots+\dfrac{\ln n}{n}-f(n)$, este descrescător.

2. Se consideră funcția $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x}$; $f''(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0$ pe intervalul $(0;\ e]$, deci f este convexă.

b) Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{2}\ln^2 x=\infty$, dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta spre ∞. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}\ln^2 x=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln^2 x}{x}=0$, deducem că f nu are nici asimptote orizontale și nici oblice.

c) Avem $a_{n+1}-a_n=\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}-(f(n+1)-f(n))$. Pentru a arăta că șirul este descrescător trebuie demonstrată inegalitatea:

$\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}<f(n+1)-f(n),\ n\geq 3$.

Aplicând funcției f teorema lui Lagrange pe intervalul $[n,\ n+1]$, deducem că există un punct $c_n\in(n,n+1)$, astfel încât $\dfrac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f'(c_n)\Rightarrow f(n+1)-f(n)=f'(c_n)$, unde $c_n\in(n,n+1)$ (1).

Dar $f''(x)<0$ pe $[3,\infty)$, deci f' descrescătoare pe $[3,\infty)$ și cum $c_n<n+1$, deducem că $f'(c_n)>f'(n+1)$. Cum $f'(n+1)=\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$, obținem că $f'(c_n)>\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă că $\frac{\ln(n+1)}{n+1} < f(n+1)-f(n)$, deci şirul este descrescător.

2. a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Atunci aria cerută este $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

b) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi^2}{4}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$

Fie $x_n = \frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$ $\left(\text{provine din } \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$.

Fie $y_n = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$, y_n este suma Riemann asociată restricţiei funcţiei $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$, diviziunii $\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1\right)$ şi sistemului de puncte intermediare $(y_n) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $y_n = \sigma_{s_n}(f, \xi_n) \to \int_0^1 \cos x dx = \sin 1$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \frac{1}{2}\cdot \sin 1 = \frac{\sin 1}{2}$.

VARIANTA 26

1. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \text{arctg}\, x - \text{arcctg}\, x$.

5p **a)** Să se determine asimptota la graficul funcţiei f spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat de $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1 = 0$, este convergent.

2. Fie funcţia $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x$.

5p **a)** Să se arate că funcţia $g: [-1,1] \to \mathbb{R}, g(x) = xf(x)$ are primitive, iar acestea sunt strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$.

Soluţii

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\text{arctg}x - \text{arcctg}x) = \frac{\pi}{2}$, deci $y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$;

b) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\text{arctg}x - \text{arcctg}x) = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}$. Deoarece f este strict crescătoare avem $-\frac{3\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$; $-\frac{3\pi}{2} < f(x_n) < \frac{\pi}{2}, \forall x_n \in \mathbb{R}$, deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit;

$x_1 = 0$, $x_2 = f(x_1) = \text{arctg}0 - \text{arcctg}0 = -\frac{\pi}{2}$. Rezultă $x_2 < x_1$, presupunem $x_k < x_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$; f fiind strict crescătoare rezultă $f(x_k) < f(x_{k-1})$, deci $x_{k+1} < x_k$. S-a demonstrat astfel, prin inducţie matematică că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător. Din mărginire şi monotonie se deduce convergenţa şirului.

2. a) $g(x) = x\arcsin x$ este continuă pe $[-1; 1]$ şi ca urmare are primitive. De asemenea $g(x) = x\arcsin x > 0$ pe $[-1; 1] \setminus \{0\}$, pentru că este funcţie pară şi pozitivă pe $(0; 1]$, deci pentru $[-1; 0)$ este tot pozitivă. $(f(-x) = f(x))$.

Deoarece $g > 0$ pe $[-1; 1] \setminus \{0\}$ rezultă că orice primitivă a sa este strict crescătoare.

b) $\int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} \arcsin x dx = x\arcsin x\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.

c) $\int_0^1 xf(x)dx \leq \int_0^1 \frac{\pi x}{2} dx$, de unde rezultă concluzia.

VARIANTA 27

1. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\arcsin x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2-x}$.

5p **b)** Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția F este bijectivă.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)\,dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F și $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)\arcsin x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

b) f continuă pe $[-1,1]$; f derivabilă pe $(-1,1)$; $f'(x)=\arcsin x+\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$\lim\limits_{x\searrow -1} f'(x)=-\infty$, atunci $f'(-1)=-\infty$, deci f nu e derivabilă în $x=-1$.

$\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\left(\arcsin x+\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\left(\arcsin x-\sqrt{\dfrac{(1-x)^2}{1-x^2}}\right)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\left(\arcsin x-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)=$

$=\dfrac{\pi}{2}$, $f'(1)=\dfrac{\pi}{2}$, deci f derivabilă în $x=1$. Rezultă că f nu e derivabilă decât în $x=-1$.

c) $f''(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}>0$, pentru orice $x\in(-1,1)$.

2. a) $F'(x)=f(x)=x^4+x^3+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^2}{4}+x+1+\dfrac{x^2}{2}=\left(x^2+\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2+\dfrac{x^2}{2}>0$, de .

unde F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) F strict crescătoare, rezultă F injectivă. $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}$.

Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$, F continuă, rezultă $F(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, atunci F este și surjectivă. Deci F este bijectivă.

c) Cu schimbarea de variabilă $F^{-1}(x)=t$, $x=F(t)$, $dx=F'(t)dt=f(t)dt$.

Pentru $x=0$ avem $t=F^{-1}(0)=0$. Pentru $x=a$ avem $t=F^{-1}(a)=1$.

Rezultă că integrala se scrie $I=\int_0^1 t\cdot f(t)dt=\int_0^1(t+t^2+\ldots+t^5)dt=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{29}{20}$.

VARIANTA 28

1. Fie funcția $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

5p **b)** Să se determine domeniul de continuitate al funcției f.

5p **c)** Să se determine toate punctele în care funcția f nu este derivabilă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2-\sin x}$ și $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$.

Soluții

1. a) Deoarece $\{x\}=x-[x]$, avem $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\{x\}=1$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=0$.

b) f continuă pe $[0;3]\setminus\mathbb{Z}$ (operații cu funcții continue); $f(x)=(x-[x])(1-x+[x])$;

dacă $n\in\mathbb{Z}$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}}[x]=n-1$; $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}}[x]=n$, $(\forall)n=\overline{1,3}$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x)=0$,

deci $\lim\limits_{x\to n} f(x)=0=f(n)$. Rezultă că f este continuă pe $[0;3]$.

c) f derivabilă pe $[0;3]\setminus\mathbb{Z}$ (operații cu funcții derivabile).

$\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}}\dfrac{f(x)-f(n)}{x-n}=\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}}\dfrac{\{x\}(1-\{x\})}{x-n}=\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}}\dfrac{(x-[x])(1-x+[x])}{x-n}=\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}}\dfrac{(x-n)(1-x+n)}{x-n}=1$;

$\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}}\dfrac{f(x)-f(n)}{x-n}=\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}}\dfrac{(x-(n-1))(1-x+n-1)}{x-n}=-1$, deci f nu e derivabilă în punctele $\{1;2\}$.

2. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2-\sin x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(2-\sin x)'}{2-\sin x}dx=-\ln|2-\sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$=-(\ln 1-\ln 2)=\ln 2$.

b) Cum $F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{2-\sin x}>0$ rezultă că F este strict crescătoare.

c) $f(x)=\dfrac{1}{2-\sin x}\geqslant\dfrac{1}{3}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ (pentru că $\sin x\in[-1,1]$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$). Deci avem

$F(x)=\int_0^x f(t)dt\geqslant\dfrac{x}{3}$ de unde rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$.

VARIANTA 29

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile
$f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1} + x^{2n}, g_n(x) = x^{2n+1} + 1.$

5p **a)** Să se verifice că $f_n'(x) = \frac{g_n'(x)}{x+1} - \frac{g_n(x)}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Soluții

1. a) $(x+1)f_n(x) = 1 + x^{2n+1} = g_n(x)$, deci $f_n(x) = \frac{g_n(x)}{x+1}, (\forall) x \neq -1$.

$f_n'(x) = \frac{g_n'(x)(x+1) - g_n(x)}{(x+1)^2} = \frac{g_n'(x)}{x+1} - \frac{g_n(x)}{(x+1)^2}$.

b) $f_n'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{g_n'\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}} - \frac{g_n\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{9}{4}} = \frac{2}{3}\left[(2n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right] - \frac{4}{9}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + 1\right] = \frac{2}{3}\cdot(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} -$

$-\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - \frac{4}{9}$. Fie $x_n = \frac{2n+1}{2^{2n}}; x_n > 0; \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+3}{2^{2n+2}}\cdot\frac{2^{2n}}{2n+1} = \frac{2n+3}{2n+1}\cdot\frac{1}{4} \to \frac{1}{4} < 1$,

deci $x_n \to 0$ (conform criteriului raportului); rezultă că $f_n'\left(\frac{1}{2}\right) \to -\frac{4}{9}$.

c) $f_n'(x) = \frac{(x+1)g_n'(x) - g_n(x)}{(x+1)^2} = \frac{2nx^{2n+1} + (2n+1)x^{2n} - 1}{(x+1)^2}, x \neq -1$.

Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2nx^{2n+1} + (2n+1)x^{2n} - 1$;

$h'(x) = 2n(2n+1)x^{2n-1}(x+1)$; $h'(x) = 0$ dacă $x = 0, x = -1$.

x	$-\infty$	-1		0		α	$+\infty$
h'	$+++$	0	$---$	0	$+$	$+$	$+$
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
h	$---$		0	$----$		$---0$	$+$

Observație: $(\exists)\ \alpha > 0$ a.î. $h(\alpha) = 0$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f_n	$\searrow$	v	$\nearrow$
f_n'	$----$	0	$++++$

Deci f_n are un singur punct de extrem.

2. a) $I_2 = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\cdot\ln 2$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^3}dx < 0$, deci I_n este strict descrescător.

c) $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

VARIANTA 30

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$.

5p **a)** Să se determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se calculeze derivata a doua a funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\le 0, \forall x\ge 0$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit de $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este convergent.

Soluții

1. a) $x-\frac{x^3}{6}-\sin x\ge x-\frac{x^3}{6}-1$. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x^3}{6}-1\right)=+\infty$, deci $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

b) $f'(x)=1-\frac{x^2}{2}'-\cos x$, $f''(x)=-x+\sin x$.

c) $f'''(x)=-1+\cos x\le 0$, deci f'' descrescătoare, adică $(\forall)x\ge 0$, avem $f''(x)\le f''(0)=0$. Rezultă f' descrescătoare pe $[0,\infty)$, de unde $(\forall)x\ge 0$, avem $f'(x)\le f'(0)=0$. Rezultă f descrescătoare pe $[0,\infty)$ și $(\forall)x\ge 0$ avem $f(x)\le f(0)=0$.

2. a) $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{x^2+1}=f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=F(x)\big|_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

c) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ și reprezintă sume Riemann asociate funcției f, diviziunilor $D_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}\right)$ și punctelor intermediare $X_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}\right)$. Deoarece funcția este integrabilă, fiind continuă, iar șirul normelor diviziunilor tinde la 0, șirul $(a_n)_n$ este convergent.

VARIANTA 31

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{|x^2-x|}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se verifice că $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Soluții

1. a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x}, x\in(-\infty,0]\cup[1,\infty)\\ \sqrt{x-x^2}, x\in(0,1)\end{cases}$. $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}=-1$

$n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}$,

deci $y=-x+\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

b) f continuă pe $\mathbb{R}$ (operații cu funcții continue)

$f'(x)=\begin{cases}\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}, x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)\\ \frac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}, x\in(0,1)\end{cases}$; $f_s'(0)=-\infty$, $f_d'(0)=+\infty$,

$f_s'(1)=-\infty$, $f_d'(1)=+\infty$, deci domeniul de derivabilitate este $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		∞
f'	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	0	$-$	$+$	$+$	$+$
f	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Deci $x=0$ și $x=1$ sunt puncte de minim local, iar $x=\frac{1}{2}$ este punct de maxim local.

Deci $x=0$ şi $x=1$ sunt puncte de minim local, iar $x=\frac{1}{2}$ este punct de maxim local.

2. a) $I_2=\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x\Big|_0^1-\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$

b) $I_{n+2}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}+x^n}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$.

c) $nI_n=\int_0^1\frac{nx^n}{x^2+1}dx=\int_0^1nx^{n-1}\cdot\frac{x}{x^2+1}dx=x^n\cdot\frac{x}{x^2+1}\Big|_0^1-\int_0^1x^n\cdot\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}-J_n$.

Evident $0\leqslant\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\leqslant 1$, $(\forall)x\in[0,1]$, deci $0\leqslant J_n\leqslant\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$, de unde

$\lim\limits_{n\to\infty}J_n=0$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$.

VARIANTA 32

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $0<f(x)\leq\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^2\frac{f'(x)}{x}dx$.

5p **b)** Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{1}{1+(x+2)^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{-4(x+1)}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}$.

b) $f'(x)=0$ dacă $x=-1$, $f(-1)=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0
f'	$+++$		0	$---$	

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, deci $0<f(x)\leqslant\frac{\pi}{2}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

c) Evident g derivabilă pe $\mathbb{R}$.

$g'(x)=f'(x)+\frac{1}{1+\frac{(x+1)^4}{4}}\cdot(x+1)=f'(x)+\frac{4(x+1)}{(x+1)^4+4}=0$ (calcul!), deci g este constantă.

2. a) $f'(x)=x^2-1+\frac{1}{1+x^2}=x^2-\frac{x^2}{1+x^2}$;

$\int_1^2 \frac{f'(x)}{x}dx = \int_1^2 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

b) $\int_0^x f(t)dt = \frac{t^4}{12}\Big|_0^x - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + t\,\text{arctg}t\Big|_0^x - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^x = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + x\,\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

$\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{12} - \frac{1}{2x} + \frac{\text{arctg}x}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^3}$.

Știm că $\lim\limits_{x\to\infty}\text{arctg}x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^3} = 0$. Rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{12} = \infty$.

c) $f(x) - g(x) = \frac{x^3}{3} - x = \frac{x(x^2-3)}{3} \leqslant 0$, $(\forall)x \in [0,1]$;

aria$= \int_0^1 (g(x) - f(x))dx = \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)dx = -\frac{x^4}{12}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$.

VARIANTA 33

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul

$(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x) = \int_0^x t^n \,\text{arctg}\,t\,dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $f_1(x) = \frac{x^2+1}{2}\text{arctg}\,x - \frac{x}{2}$, $\forall x \geq 0$.

5p **b)** Să arate că $f_n(1) \leq \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nf_n(1)$.

Soluții

1. a) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$. Deci $f''(x) > 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$, de unde rezultă că f' este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

b) Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul $[k, k+1]$, $k > 0$, rezultă că există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât $\frac{f(k)-f(k+1)}{k-(k+1)} = f'(c_k)$, de unde obținem $\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = -f'(c_k)$.

Din $k < c_k < k+1$, conform punctului **a)**, rezultă $\frac{1}{2k\sqrt{k}} > -f'(c_k) > \frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}$.

În final obținem $\frac{1}{2k\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}$.

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

Dând valori lui k în inegalitatea de la punctul b) obținem inegalitățile

$$\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{1}{2\cdot 3\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$$
.....
$$\frac{1}{2n\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

De unde, prin însumare, rezultă $\frac{1}{2}(a_n-1)<1-\frac{1}{\sqrt{n}}$ sau $a_n<3-\frac{2}{\sqrt{n}}<3$.

Deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Fiind monoton şi mărginit, este convergent.

2. a) $f_1(x)=\int_0^x t\ \text{arctg}\,t\,dt=\frac{t^2}{2}\cdot\text{arctg}\,t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\ dt=\frac{x^2}{2}\cdot\text{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt=$

$=\frac{x^2}{2}\cdot\text{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int_0^x dt+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{x^2}{2}\cdot\text{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\text{arctg}\,x=\frac{x^2+1}{2}\text{arctg}\,x-\frac{x}{2}$,

$\forall x\geq 0$.

b) $f_n(1)=\int_0^1 t^n\cdot\text{arctg}\,t\,dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}\text{arctg}\,t\Big|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{4(n+1)}-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt\leq$

$\leq\frac{\pi}{4(n+1)}$.

c) $nf_n(1)=\frac{n\cdot\pi}{4(n+1)}-\frac{n}{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt$. (*).

$0\leq\frac{t^{n+1}}{t^2+1}\leq t^{n+1}$, $\forall t\in[0,\,1]$ şi integrând inegalitatea obţinem $0\leq\int_0^1\frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt\leq\frac{1}{n+2}$ (**).

Trecând la limită în inegalitatea (**) şi din criteriul cleştelui avem

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt=0$. (***).

Din (*) şi (***) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}nf_n(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\pi}{4(n+1)}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{4}-1\cdot 0=\frac{\pi}{4}$.

VARIANTA 34

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x t^n\arcsin t\,dt$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcţiei f_3.

5p **b)** Să se calculeze $f_1\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f_2(x)$.

Soluţii

1. a) $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{(x+1)^2(2x+3)(2x+1)}>0$, $\forall x\in(0,\,+\infty)$, de unde rezultă că f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=1-\ln 3<0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ şi cum f este strict crescătoare avem $f(x)<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

c) $a_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln\left(n+1+\frac{1}{2}\right)$, $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(n+\frac{3}{2}\right)+\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)=$

$=f(n)<0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $a_{n+1}<a_n$, $\forall n$, adică şirul este strict descrescător.

2. a) $f_3(x)=\int_0^x t^3\arcsin t\,dt$; $f_3'(x)=x^3\arcsin x$.

b) $f_1\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}t\arcsin t\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\right)'\arcsin t\,dt=\frac{t^2}{2}\arcsin t\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}t^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t_2}}dt$.

Fie $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}(-\sqrt{1-t^2})'\cdot t\,dt=-t\sqrt{1-t^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-t^2}dt=-\frac{\sqrt{3}}{4}+$

$+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\arcsin t\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-I$, deci

Înlocuim și obținem $f_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{48}$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_2(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\int_0^x t^2\arcsin t\,dt=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$

deoarece $\int_0^x t^2\arcsin t\,dt=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{3}\int_0^x\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{x^3}{3}\arcsin x+\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+$

$+\frac{2}{9}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{9}$.

VARIANTA 35

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(e^x+1)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}x^a f(x)=0,\forall a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^2(2x-x^2)^n dx,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se demonstreze că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde descrescător către 0.

Soluții

1. a) $f'=\frac{1}{e^x+1}$, $f''(x)=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0,\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\overset{e^x=t}{=}\lim\limits_{t\to\infty}[\ln t-\ln(t+1)]=0$. Dacă $a\leq 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}x^a f(x)=0$. Dacă $a>0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}x^a\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{-a}}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^x+1}}{-ax^{-a-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{1}{a}\cdot\frac{x^{a+1}}{e^x+1}=0$, pentru că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^r}{e^x}=0,\forall r\in\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-\ln e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]=0$ rezultă $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{e^x+1}}{1}=1$, $n=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}[-\ln\left(e^x+1\right)]=0$.

Deci $y=x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

2. a) $I_1=\int_0^2(2x-x^2)dx=x^2\Big|_0^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3}$.

b) $I_n=\int_0^2(2x-x^2)^n(x-1)'dx=(2x-x^2)^n(x-1)\Big|_0^2-n\int_0^2(2x-x^2)^{n-1}(2-2x)(x-1)dx=$

$=-2n\int_0^2(2x-x^2)^{n-1}\left(-x^2+2x-1\right)dx=-2n\int_0^2(2x-x^2)^n dx+2n\int_0^2(2x-x^2)^{n-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow(2n+1)\mathrm{I}_n=2n\mathrm{I}_{n-1}$.

c) Avem $I_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi din punctul **b)** $I_{n-1} = I_n + \frac{1}{2n} I_n > I_n$, $\forall n \geq 2$ (1). Astfel şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător şi fiind monotom are limită, pe care o notăm cu $l \geq 0$, iar $I_n \geq l$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Adunând relaţiile (1) avem $I_1 = \frac{1}{4} I_2 + \frac{1}{6} I_3 + \ldots + \frac{1}{2n} I_n \geq$ $\geq \frac{l}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, de unde $l \leq \frac{2I_1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$. Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty$, deducem că $l = 0$.

VARIANTA 36

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}$ şi şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$, $a_{n+1} = f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este strict crescătoare pe $(-\infty, \sqrt{3})$ şi pe $(\sqrt{3}, \infty)$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nu este convergent.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcţiei F.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 F(x)\,dx$.

Soluţii

1. a) $f'(x) = \left(\frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}\right)' = \frac{(x\sqrt{3}+1)'(\sqrt{3}-x) - (x\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-x)'}{(\sqrt{3}-x)^2} = \frac{4}{(\sqrt{3}-x)^2} > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(-\infty, \sqrt{3})$ şi $(\sqrt{3}, +\infty)$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\sqrt{3}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\sqrt{3}$, deci $y = -\sqrt{3}$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$.

$\lim\limits_{x \nearrow \sqrt{3}} f(x) = \frac{4}{0_+} = +\infty$, $\lim\limits_{x \searrow \sqrt{3}} f(x) = \frac{4}{0_-} = -\infty$, deci $x = \sqrt{3}$ este asimptotă verticală.

c) Verificăm că şirul a_n este periodic, deci nu este convergent.

2. a) $F'(x) = f(x)$; $F''(x) = f'(x) = -2xe^{-x^2}$. $F''(x) = 0$ dacă $x = 0$. Pentru $x \leq 0$, F este convexă, iar pentru $x \geq 0$, F este concavă. Deci avem un punct de inflexiune şi anume $(0, F(0))$.

b) $\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \int_0^1 \frac{(e^{-x^2})'}{-2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2e^{x^2}}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2e}$.

c) $\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 x'F(x)\,dx = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xF'(x)\,dx = F(1) + \frac{1-e}{2e} = \frac{1-e}{2e}$.

VARIANTA 37

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+3\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^a}$ există, este finită și nenulă.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ dat de $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{3x^4}{1+x^2}\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) f fiind strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și având în vedere continuitatea lui f pe $\mathbb{R}$ deducem bijectivitatea funcției f.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^a}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+3\operatorname{arctg}x}{x^3}\cdot\dfrac{1}{x^{a-3}}$;

dacă $a=3$, atunci limita este 1;
dacă $a>3$, atunci limita este 0;
dacă $a<3$, atunci limita este ∞.
Deci $a=3$.

2. a) $I_1=\int_0^1 xe^x dx=\int_0^1 x\cdot(e^x)'dx=xe^x\big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=1$.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx-\int_0^1 x^n e^x dx=\int_0^1 x^n e^x(x-1)dx\leq 0$, deoarece $x^n e^x(x-1)\leq 0, \forall x\in[0,1]$
În consecință $I_{n+1}\leq I_n$, deci șirul (I_n) este descrescător. Avem implicațiile: $0\leq x\leq 1\Rightarrow 0\leq x^n e^x\leq e^x$. Integrând pe [0, 1] obținem $0\leq I_n\leq e-1$. Prin urmare șirul (I_n) este mărginit. Fiind monoton și mărginit rezultă că (I_n) este convergent.

c) Funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^n e^x$ fiind continuă, există $c\in(0,1)$ astfel încât $I_n=\int_0^1 f(x)dx=(1-0)f(c)=c^n\cdot e^c$. În consecință, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$. Folosind integrarea prin părți obținem relația $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$, de unde $nI_n=e-I_n-I_{n+1}$ și, trecând la limită, $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=e$.

VARIANTA 38

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)dx$ nu depinde de numărul real a.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}>0\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Dacă f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și în plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și f continuă pe $\mathbb{R}$. Rezultă că f este bijectivă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x^2+x+1)=\infty$, deci f nu are asimptotă oblică spre ∞.

2. a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x(1-x)dx=\int_0^1(x-x^2)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

b) $\{x\}=x-[x]\Rightarrow f(x)=(x-[x])(1-x+[x])=\begin{cases}(x-k+1)(k-x), & k-1\leq x<k\\ (x-k)(k+1-x), & k\leq x<k+1\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

Din $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x<k}} f(x)=0, \lim\limits_{\substack{x\to k\\ x>k}} f(x)=0$ rezultă că f este continuă în $x=k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$. Rezultă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Avem $f(x+1)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ și $\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{a+1} f(x)dx$.

Pentru $\int_1^{a+1} f(x)dx$ facem substituția $x=k+1$ și folosim periodicitatea lui f. Obținem $\int_1^{a+1} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx=-\int_a^0 f(x)dx$. În consecință, $\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{6}$, deci nu depinde de ea.

VARIANTA 39

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea $x_0\in(0,1)$, $x_{n+1}=e^{f(x_n)}$, este convergent.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{4x+5}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relația $4I_{n+1}+5I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\ln x+1$, $x\in(0;+\infty)$; $f'(x)=0$ pentru $x=\frac{1}{e}$. Atunci f este strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{e};+\infty\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(0;\frac{1}{e}\right]$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\ln x=\infty$, deci f nu are asimptotă orizontală.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$, deci f nu are nici asimptotă oblică.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x \overset{l'H}{=} 0$, deci f nu are nici asimptotă verticală.

c) $a\in(0;1)$, $e^{f(a)}=e^{a\ln a}=a^a$; $e^{f(a)}\in(0;1)$. Rezultă că, dacă $x_0\in(0,1)$, atunci $x_1=e^{f(x_0)}\in(0,1)$ și prin inducție $x_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $a\in(0,1)$ avem $\frac{e^{f(a)}}{a}=\frac{a^a}{a}=\frac{1}{a^{1-a}}>1$, deoarece $a^{1-a}\in(0,1)$. Ca urmare, prin inducție, $x_0<x_1<...<x_n<...$

Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător și mărginit, rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

2. a) $I_2=\int_0^1\frac{x^2}{4x+5}dx=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^2-\frac{25}{16}+\frac{25}{16}}{x+\frac{5}{4}}dx=\frac{1}{4}\int_0^1\left(x-\frac{5}{4}+\frac{25}{16\left(x+\frac{5}{4}\right)}\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{4}\right)\Big|_0^1+$

$+\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{16}\ln\left(x+\frac{5}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{16}\left(-3+\frac{25}{4}\ln\frac{9}{5}\right)$.

b) $4I_{n+1}+5I_n=\int_0^1\frac{4x^{n+1}}{4x+5}dx+\int_0^1\frac{5x^n}{4x+5}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$;

c) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{4x+5}dx\leqslant 0\Rightarrow I_{n+1}\leqslant I_n$. Avem $4I_{n+1}+5I_n\leqslant 9I_n$ și $4I_{n+1}+5I_n\geqslant 9I_{n+1}$, adică $\frac{1}{n+1}\leqslant 9I_n$ și $\frac{1}{n+1}\geqslant 9I_{n+1}$ sau $\frac{1}{n}\geqslant 9I_n$, deci $\frac{1}{9(n+1)}\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{9n}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{9}$.

VARIANTA 40

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcțiile $F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_n(x)=\int_0^x t\sin^n t\,dt$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(\pi)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $F_{n+1}(1)<F_n(1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(1)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ se anulează numai în $x=0$, este continuă și, de exemplu, în -1 este pozitivă. Rezultă $f'(x)>0, \forall x\in(-\infty,0)$. Prin urmare f este strict crescătoare pe $(-\infty,0]$.

b) $f''(x)=\frac{2}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}-\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ se anulează în $x=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}-1}}$, puncte în care își schimbă semnul. Rezultă că f are aceste două puncte de inflexiune.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}=0$, deci $y=0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$.

2. a) $F_1(\pi)=\int_0^\pi t\sin t\,dt=-\int_0^\pi t(\cos t)'dt=-t\cos t\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos t\,dt=\pi+\sin t\Big|_0^\pi=\pi$.

b) $F_{n+1}(1)-F_n(1)=\int_0^1 t\sin^{n+1}t\,dt-\int_0^1 t\sin^n t\,dt=\int_0^1 t\cdot\sin^n t(\sin t-1)dt$. Avem $t\in[0,1]$, deci $t\sin^n t(\sin t-1)\leqslant 0$. Atunci $F_{n+1}(1)-F_n(1)\leqslant 0$, de unde rezultă că $F_{n+1}(1)\leqslant F_n(1)$.

c) Funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=t\sin^n t$ fiind continuă, există $c\in(0,1)$ astfel încât $F_n(1)=\int_0^1 f(t)dt=(1-0)f(c)=c\sin^n c$ (teorema de medie). Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n c=0$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(1)=0$.

VARIANTA 41

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$, $f(x)=\ln(1+x)-x$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p b) Să se arate că funcția f este surjectivă.

5p c) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptote.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(\ln t)dt=\frac{\pi}{2}$.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$, $(\forall)x\in(0,\infty)$, deci f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

b) Avem $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]$ (*).

Aplicând regula l'Hospital avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}=0$ şi din (*) obținem

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$. f este continuă pe $(0,\infty)$, deci f are proprietatea lui Darboux şi cum

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ rezultă $f((0,\infty))=(-\infty,0)$ şi deci f este surjectivă.

c) Din b) rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$, deci G_f nu are asimptote orizontale.

Cum $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]=-1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x)=\infty$

rezultă că G_f nu are asimptote oblice.

Din $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=0$ rezultă că G_f nu are asimptote verticale.

2. a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\operatorname{arctg}x=x\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln2}{2}$.

b) $0\le f(\ln t)$, $\forall t\ge0$; $\int_1^x f(\ln t)dt\ge\int_e^x f(\ln t)dt\ge x$.

Rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^e f(\ln t)dt=+\infty$ şi atunci se poate aplica regula lui l'Hospital.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(\ln t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}f(\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}(\ln x)=\frac{\pi}{2}$.

c) Observăm că $s_n=\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ este o sumă Riemann atașată funcției f, intervalului $[0,1]$, diviziunii $\Delta_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}\right)$ şi punctelor intermediare $x_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}\right)$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln2}{2}$.

VARIANTA 42

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x$ și șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit de $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n=\int_0^1(x-x^2)^n dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n=\frac{n}{4n+2}I_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}$.

Din $f''(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(-x)=\lim\limits_{x\to\infty}[-x\operatorname{arctg}(-x)]=\lim\limits_{x\to\infty}(x\operatorname{arctg}x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=\infty\cdot\frac{\pi}{2}=\infty$

deci G_f nu are asimptote orizontale spre $-\infty$.

Avem $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$; $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}x\right]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-1$, deci dreapta $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

c) Din $f'(0)=0$ și f' strict crescătoare pe $[0,\infty)$ rezultă că $f'(x)\geq f(0)=0$, $\forall x\in[0,\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,\infty)$.

Prin inducție matematică arătăm că $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Cum $\operatorname{arctg}x\leq x$, $\forall x\geq 0$ avem că $x_{n+1}-x_n=x_n(\operatorname{arctg}x_n-1)\leq x_n(x_n-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (*).

Vom demonstra prin inducție matematică propoziția $P(n)$: $x_n\leq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Evident $P(1)$ este adevărată și cum f este crescătoare, presupunând $P(n)$ adevărată arătăm că $x_{n+1}=f(x_n)\leq f(1)=\frac{\pi}{4}<1$, adică $P(n+1)$ este adevărată.

Folosind $P(n)$ în relația (*) obținem $x_{n+1}-x_n\leq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci (x_n) este descrescător, adică monoton. Cum $x_n\in(0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că (x_n) este mărginit. Din (x_n) monoton și mărginit rezultă că (x_n) este convergent.

2. a) $I_2=\int_0^1(x-x^2)^2dx=\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{30}$

b) Pentru $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, avem: $4nI_n=2n\int_0^1(x-x^2)^{n-1}(2x-2x^2)dx=$

$=2n\int_0^1(x-x^2)^{n-1}[x(1-2x)+x]dx=2n\int_0^1(x-x^2)^{n-1}x(1-2x)dx+2n\int_0^1(x-x^2)^{n-1}\cdot xdx=$

$=2\int_0^1\left[(x-x^2)^n\right]'xdx-n\int_0^1(x-x^2)^{n-1}[(1-2x)-1]dx=2\left[x(x-x^2)^n\Big|_0^1-\int_0^1(x-x^2)^n dx\right]-$

$-n\int_0^1(x-x^2)^{n-1}(1-2x)dx+n\int_0^1(x-x^2)^{n-1}dx=-2I_n-(x-x^2)^n\Big|_0^1+$

$+n\int_0^1(x-x^2)^{n-1}dx=-2I_n+nI_{n-1}$, de unde $(4n+2)I_n=nI_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

c) Din b) avem $2\frac{I_n}{I_{n-1}}=\frac{n}{2n+1}\leq\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Avem $\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{2I_k}{I_{k-1}}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

deci $2^{n-1}\frac{I_n}{I_1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Cum $I_1=\frac{1}{6}$ și $I_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, căci $(x-x^2)^n\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$ rezultă că

$0<2^n\cdot I_n\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $0<I_n\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ (*).

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=0$, folosind criteriul cleștelui, din relația (*) obținem $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

VARIANTA 43

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite exact un punct de extrem local.

5p **c)** Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un număr real oarecare.

2. Fie funcțiile $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_1^{\operatorname{tg}x}\frac{t}{1+t^2}dt$ și $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_1^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{t(1+t^2)}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)+g(x)=0$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=1-e^{-x}=\frac{e^x-1}{e^x}\geqslant 0$, $\forall x\in[0,\infty)$, rezultă că f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

b) Din $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0$ rezultă că $x=0$ este punct critic.

Din $f'(x)<0$, $\forall x\in(-\infty,0)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$, deci $f(x)>f(0)$, $\forall x\in(-\infty,0)$.

Cum f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, deci $f(x)>f(0)$, $\forall x\in(0,\infty)$.

Deoarece $f(0)=0$ rezultă $f(x)\geqslant f(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $x=0$ este punct de minim local.

c) Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	$---$	0	$+++$
$f(x)$	$+\infty\searrow$	1	$\nearrow+\infty$

Aplicând metoda grafică obținem:

(1) Dacă $m\in(1,\infty)$, atunci ecuația are 2 soluții reale diferite.

(2) Dacă $m=1$, atunci ecuația are doar o soluție.

(3) Dacă $m\in(-\infty,1)$, atunci ecuația nu are nicio soluție reală.

2. a) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_1^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$.

b) $f'(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}(\operatorname{tg}x)'=\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}=\operatorname{tg}x$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Consider funcția $h:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)+g(x)$.

Avem $g'(x)=\frac{1}{\operatorname{ctg}x(1+\operatorname{ctg}^2x)}\cdot(\operatorname{ctg}x)'=\frac{1}{\operatorname{ctg}x(1+\operatorname{ctg}^2x)}\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)=-\operatorname{tg}x$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Atunci $h'(x)=f'(x)+g'(x)=\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x=0$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci $h(x)=k$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, k constantă.

Cum $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)+g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0+0=0$ rezultă că $h(x)=0$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci $f(x)+g(x)=0$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

VARIANTA 44

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}},\ a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a=2b>0$.

5p **c)** Pentru $a=2$ și $b=1$, să se determine mulțimea valorilor funcției f.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x e^{\arcsin t}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict monotonă.

5p **b)** Să se arate că $f(x)=\int_0^{\arcsin x} e^t\cos t\,dt,\forall x\in[-1,1]$.

5p **c)** Să se determine $f(1)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{x(a-2b)+2a-b}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă $f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, adică $x(a-2b)+2a-b>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$; $a-2b=0$ și $2a-b>0$, adică $a=2b>0$.

c) Pentru $b=1$ și $a=2$ avem $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Din a) avem $f'(x)=\dfrac{3}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$, iar f fiind continuă are proprietatea lui Darboux, deci $\{f(x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}=f(\mathbb{R})=(-2,2)$.

2. a) Funcția $g:[-1,1]\to\mathbb{R},\ g(t)=e^{\arcsin t}$ este continuă pe $[-1,1]$. Rezultă că g admite primitive pe $[-1,1]$. Dacă G este o primitivă a lui g, atunci cu formula lui Leibniz-Newton avem $f(x)=G(x)-G(0)$. Cum $f'(x)=(G(x)-G(0))'=$
$=g(x)=e^{\arcsin x}>0$, $\forall x\in[-1,1]$, rezultă că f este strict monotonă (crescătoare).

b) Facem următoarea schimbare de variabilă $x=\sin t$. Rezultă $dx=\cos t$, de unde $f(x)=\int_0^{\arcsin x}e^t\cos t\,dt$, pentru orice $x\in[-1;1]$.

c) Pentru $t\in(-1,1)$ consider

$$I=\int e^{\arcsin t}dt=\int t'e^{\arcsin t}dt=te^{\arcsin t}-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}e^{\arcsin t}dt=te^{\arcsin t}+$$

$$+\int(\sqrt{1-t^2})'e^{\arcsin t}dt=te^{\arcsin t}+\sqrt{1-t^2}e^{\arcsin t}-\int e^{\arcsin t}dt=e^{\arcsin t}\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)-I,$$

de unde $I=\dfrac{1}{2}e^{\arcsin t}(t+\sqrt{1-t^2})+\mathscr{C},\ \mathscr{C}\in\mathbb{R}$; $f(1)=\dfrac{1}{2}e^{\arcsin t}(t+\sqrt{1-t^2})\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$.

VARIANTA 45

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}},\ a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Știind că $a=0$, să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se determine toate numerele reale a astfel încât funcția f să aibă trei puncte de extrem local.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}dx$.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{(2x+a)\sqrt{x^2+1}-(x^2+ax+5)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) Pentru $a=0$, $f(x)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, deci funcția nu admite asimptotă orizontală la $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4+10x^2+25}{x^2+1}-x^2}{\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}+x}=0,$$

deci $y=x$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției spre ∞.

c) f derivabilă, deci punctele de extrem se găsesc printre punctele critice.
$f'(x)=0$, deci $x^3-3x+a=0$. Considerăm $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^3-3x+a;\ g'(x)=3x^2-3$

x	$-\infty$	-1		1	∞
$g'(x)$	$+++$	0	$--$	0	$+++$
$g(x)$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$

Condiția necesară ca funcția să aibă 3 puncte de extrem este ca $g(-1)>0$ și $g(1)<0$, deci $a\in(-2,2)$.

2. a) $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1} = 0.$

b) $V_f = \pi\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = 2\pi\int_0^1 (1-x^2)dx = 2\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}$

c) $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Deci $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

VARIANTA 46

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{|x-1|}{e^x}$.

5p **a)** Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin x$.

5p **a)** Să se arate că există numerele reale a, b, c astfel încât funcția $F:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+b)\cos x+cx\sin x$ să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right)dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f și graficul funcției $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\pi x-x^2$.

Soluții

1. a) Avem $f'(x)=\begin{cases}\frac{2-x}{e^x}, & x>1\\ \frac{x-2}{e^x}, & x<1\end{cases}$; $f'_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{2-x}{e^x}=\frac{1}{e}$ și

$f'_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{x-2}{e^x}=-\frac{1}{e}$.

b)

x	$-\infty$		1		2		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/e^2$	$\searrow$	0

Pentru $m<0$ nu avem soluții. Pentru $m=0$ sau $m>\frac{1}{e^2}$ avem o soluție.

Pentru $m=\frac{1}{e^2}$ avem două soluții.

Pentru $0<m<\frac{1}{e^2}$ avem trei soluții.

c) Avem de calculat limita sumei $a_n=\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^3}+...+\frac{n-1}{e^n}$.

Prin inducție sau folosind derivarea termen cu termen a unei sume se demonstrează egalitatea: $x^2+2x^3+...+(n-1)x^n=\frac{(n-1)x^{n+2}-nx^{n+1}+x^2}{(x-1)^2}$, $n\geq 2, x\neq 1$.

În egalitatea de mai sus, înlocuind x cu $\frac{1}{e}$, obținem

$\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^3}+...+\frac{n-1}{e^n}=\frac{\frac{n-1}{e^{n+2}}-\frac{n}{e^{n+1}}+\frac{1}{e^2}}{\left(\frac{1}{e}-1\right)^2}$. Trecând la limită obținem că $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{(e-1)}$.

2. a) $F'(x)=(2a+c)x\cos x-ax^2\sin x+(c-b)\sin x$, rezultă că $a=-1, b=c=2$.

b) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{4x^2}\sin\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2x}\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

c) Observăm că $f(x)<g(x)$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci $x\sin x+x<\pi$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Avem

$A=\int_o^{\frac{\pi}{2}}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\left(\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{12}-\pi+2$.

VARIANTA 47

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\text{arctg}\frac{1}{x^2-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f admite un singur punct extrem local.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx\geq\frac{9}{10}$.

Soluții

1. a) $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\text{arctg}\frac{1}{x^2-1}=\text{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, deci dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre ∞.

c) $f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2+1}$

x	$-\infty$		-1		0		1	∞
$f'(x)$	$+$		$+$		0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow -\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}\searrow$

Se observă că $x=0$ este singurul punct de extrem local.

2. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\left(\sin x-x+\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{48}$.

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^2}=+\infty$.

c) $f'(x)=-\sin x+x$, $f''(x)=1-\cos x$, rezultă că f' este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$, deci $\cos x^2-1+\frac{x^4}{2}\geq 0\Rightarrow\cos x^2\geq 1-\frac{x^4}{2}\Rightarrow\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx\geq\frac{9}{10}$.

VARIANTA 48

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f are două puncte de extrem.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=0$;

b) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{-2(x^2-1)}{|1-x^2|\cdot(1+x^2)}$; $f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{1+x^2}, x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\\ \frac{2}{1+x^2}, x\in(-1,1)\end{cases}$;

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>-1}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$, deci domeniul de derivabilitate este $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$,

c)

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

$x=-1$ și $x=1$ (puncte unghiulare) sunt singurele puncte de extrem local.

2. a) $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1-2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=$

$=-\frac{1}{3}\cdot(-1)=\frac{1}{3}$.

b) $V_f=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\cdot\int_0^1(1-x^2)dx=\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}$.

c) $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$; f integrabilă, deci (a_n) este convergent; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

VARIANTA 49

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4-3x^2}{x^3}$.

5p **a)** Să se demonstreze că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5p **c)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției $g:[2,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\arccos f(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ și $F:[1,2]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, graficul funcției F și axa Ox.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-3x^2}{x^3}=0$. Atunci dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală către $+\infty$.

b) $f'(x)=\frac{-6x\cdot x^3-3x^2(4-3x^2)}{x^6}=\frac{3(x^2-4)}{x^4}$, $\forall x\in[1;\infty)$; din $f'(x)=0$ obținem $x^2-4=0$ și cum $x\in[1;+\infty)$, obținem $x=2$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-3x^2}{x^3}=0$; $f(1)=1$; $f(2)=-1$.

x	1		2		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Din tabelul de valori rezultă că $f([1;+\infty))=[-1;1]$.

c) Dacă $x\in(2,+\infty)\Rightarrow-1<\frac{4-3x^2}{x^3}<1\Rightarrow g$ este derivabilă pe $(2,+\infty)$.

$g'(x)=\frac{-3(x^2-4)}{x^4\sqrt{(x^3)^2-(4-3x^2)^2}}=\frac{-3(x-2)(x+2)}{x^4\sqrt{(x^3+3x^2-4)(x+1)(x-2)^2}}=-\frac{3(x+2)}{x^4\sqrt{(x+1)(x^3+3x^2-4)}}$

$\lim\limits_{x\searrow2} g'(x)=-\frac{3\sqrt{3}}{16}$, deci există $g'(2)$ și rezultă că g este derivabilă pe $[2,+\infty)$.

2. a) $F'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)'}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot x-\sqrt{x^2+1}+1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}=$

$=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}=f(x)$.

b) $V=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi\int_1^2\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}dx$.

Descompunem $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+1}$ şi avem

$V=\pi\left[\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx-\int_1^2\dfrac{1}{x^2+1}dx\right]=\pi\left[\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2-\operatorname{arctg}x\Big|_1^2\right]=\pi\left(\dfrac{1}{2}-\operatorname{arctg}2+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

c) $F(x)<0$, deci $A=-\int_1^2 F(x)dx=-xF(x)\Big|_1^2+\int_1^2 xf(x)dx=$

$=F(1)-2F(2)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_1^2=\ln\dfrac{(11+5\sqrt{5})(3-2\sqrt{2})}{2}$.

VARIANTA 50

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f către $+\infty$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n=\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+3}I_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin

$a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, are limita 0.

Soluții

1. a) $\sin\dfrac{1}{x}\in[-1;1]$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

b) $f'(x)=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}x\cos\dfrac{1}{x}=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

c) Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$, deci $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2. a) $I_2=\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)^2dx=\int_{-1}^1\left(1-2x^2+x^4\right)dx=\left(x-2\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^1=\left(1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(-1+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{16}{15}$.

b) Aplicând formula de integrare prin părți, avem

$I_{n+1}=\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)^{n+1}dx=\int_{-1}^1 x'\left(1-x^2\right)^{n+1}dx=x\left(1-x^2\right)^{n+1}\Big|_{-1}^1-\int_{-1}^1 x(n+1)\left(1-x^2\right)^n(-2x)dx=$

$=2(n+1)\int_{-1}^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx=-(2n+2)\int_{-1}^1(1-x^2-1)\left(1-x^2\right)^n dx=$

$=-(2n+2)\int_{-1}^1[(1-x^2)^{n+1}-\left(1-x^2\right)^n]dx=-(2n+2)\int_{-1}^1(1-x^2)^{n+1}dx+(2n+2)\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)^n dx$.

Rezultă că $I_{n+1}=-(2n+2)I_{n+1}+(2n+2)I_n$, deci $I_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+3}I_n$.

c) Fie şirul $J_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1[C_n^0-C_n^1x^2+C_n^2x^4-C_n^3x^6+\ldots+(-1)^nC_n^nx^{2n}]dx=$

$=C_n^0x\Big|_0^1-C_n^1\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1+C_n^2\dfrac{x^5}{5}\Big|_0^1-C_n^3\dfrac{x^7}{7}\Big|_0^1+\ldots+(-1)^nC_n^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1=$

$= C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}C_n^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = a_n$.

Cum $I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2J_n \Rightarrow J_n = \frac{1}{2}I_n$ sau $a_n = \frac{1}{2}I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deci $a_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, despre care se arată că este convergent.

Cum $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leqslant (1-x^2)^n \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 [(1-x^2)^{n+1} - (1-x^2)^n] dx = -\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx \leq 0 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

Conform teoremei lui Weierstrass, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Notând cu $l = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ şi folosind relaţia de recurenţă de la b), $a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}a_n$ obţinem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

VARIANTA 51

1. Se consideră funcţia $f:[1,\infty) \to [1,\infty)$, $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} (x - f(x))^x$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că funcţia f este bijectivă.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se determine numerele reale a şi b astfel încât funcţia F să fie primitiva unei funcţii f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx$.

5p **c)** Să se arate că, pentru funcţia $h:[1,\pi]\to\mathbb{R}$, $h(x) = (F(x)-1)\sin x$, are loc relaţia $\int_1^\pi h(x)h''(x)dx \leq 0$.

Soluţii

1. a)

$\lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{x^2-x+1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

b) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$; $f'(x) > 0, \forall x \in [1,\infty)$, deci f este strict crescătoare.

c) Cum f este strict crescătoare, rezultă că f este injectivă. f este continuă pe $[1,\infty)$; $f(1) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Deoarece f este şi strict crescătoare, rezultă că imaginea funcţiei f este $[1,\infty)$, deci f este surjectivă.

f injectivă şi surjectivă, rezultă f bijectivă.

2. a) Funcţia F trebuie să fie continuă şi derivabilă. Din continuitatea în 1 rezultă $a + b = 1$. Din derivabilitatea în $x = 1$ rezultă $a = 0$. Deci $a = 0$ şi $b = 1$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $\ln x = t$; pentru $x \in [1, e]$, avem $t \in [0, 1]$. Rezultă

$\int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

c) h este de două ori derivabilă, cu derivata de ordinul doi funcţie continuă. Utilizăm integrarea prin părţi. $\int_1^\pi h(x)h''(x)dx = \int_1^\pi h(x)(h'(x))'dx = h(x)h'(x)\Big|_1^\pi - \int_1^\pi h'(x)h'(x)dx$.

Deoarece $h(1) = h(\pi) = 0$ rezultă $h(x)h'(x)\Big|_1^\pi = 0$.

Deci $\int_a^b h(x)h''(x)dx = -\int_a^b (h'(x))^2 dx \leqslant 0$.

VARIANTA 52

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{\pi}{x}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este continuă pe $[0,1]$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se arate că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci ecuația $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$.

2. Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x^2)$ și $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficele funcțiilor f și g și de dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Soluții

1. a) f este continuă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, se obține prin operații cu funcții continue. Cum $\left|x\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq|x|$ și $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$, rezultă $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{\pi}{x}=0$. Deci $\lim\limits_{x\searrow0}f(x)=0=f(0)$. Prin urmare f este continuă și în 0, deci este continuă pe $[0,1]$.

b) f este derivabilă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, se obține prin operații cu funcții derivabile. Deoarece limita $\lim\limits_{x\searrow0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow0}\sin\frac{\pi}{x}$ nu există, f nu este derivabilă în 0. Deci $D_{f'}=(0,1]$. $f'(x)=\sin\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}, \forall x\in(0,1]$.

c) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și funcția $g:\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\Rightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\cos\frac{\pi}{x}$; funcția g este continuă și $g\left(\frac{1}{n}\right)\cdot g\left(\frac{1}{n+1}\right)=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n+2}=-1<0$; deci există $c\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ astfel încât $g(c)=0$, adică $f(c)=\cos\frac{\pi}{c}$.

2. a) $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\int_0^1\ln(1+x)dx$.

$\int_0^1\ln(1+x)dx=\int_0^1 x'\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln2-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$.

$\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=1-\ln2$, deci $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=2\ln2-1$.

b) $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$;

$\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=1-\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$. Rezultă $\int_0^1 g(x)dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

c) Considerăm funcția $\varphi=f-g$. Atunci: $\varphi'(x)=\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg}x$ și

$\varphi''(x)=-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$. Deoarece $\varphi''(x)\leq0$, rezultă φ' este descrescătoare și $x\geq0\Rightarrow\varphi'(x)\leq\varphi'(0)\Rightarrow\varphi'(x)\leq0$. Prin urmare φ este descrescătoare și $x\geq0\Rightarrow\varphi(x)\leq\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)\leq0\Rightarrow f(x)\leq g(x)$. Deci aria căutată este $A=\int_0^1[g(x)-f(x)]dx=-\frac{\pi}{4}-\ln2+\frac{3}{2}$, unde $\int_0^1 f(x)dx=\ln2-2+\frac{\pi}{2}$.

VARIANTA 53

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ și un număr real m din intervalul $(-2,\infty)$.

5p **a)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că ecuația $x^3-3x=m$ are soluție unică în mulțimea $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine primitiva F a funcției f care are proprietatea $F(0)=-1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=3x^2-3$. Rezultă -1 și 1 puncte de extrem.

b) $f(1)=-2$; $f'(x)>0$ pentru $x\in(1,+\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(1,\infty)$; f continuă pe $(1,\infty)$. În concluzie, $f(x)>-2,\forall x\in(1,\infty)$, deci ecuația $f(x)=m>-2$ are soluție unică pe $(1,\infty)$.

c) $g(x)=f^2(x)=x^6-6x^4+9x^2$; $g'(x)=6(5x^4-12x^2+3)$; $g''(x)=0$; $5x^4-12x^2+3=0$. Notăm $x^2=y$, ecuația devine $5y^2-12y+3=0$ având $\Delta=84>0$.

$y_1=\dfrac{12+\sqrt{84}}{10}>0$; $y_2=\dfrac{12-\sqrt{84}}{10}>0$. Atunci $g''(x)$ are 4 rădăcini reale și în vecinătatea fiecărei rădăcini semnul alternează, deci graficul funcției g are 4 puncte de inflexiune.

2. a) f este continuă pe $(-\infty,0)$, respectiv pe $(0,\infty)$; $f_s(0)=f_d(0)=f(0)$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$. Rezultă că f admite primitive.

b) $\int xe^x dx=e^x x-\int e^x dx=e^x(x-1)+C_1$; $\int\sin x dx=-\cos x+C_2$.

Obținem $F(x)=\begin{cases}e^x(x-1)+C_1, & x\le 0\\ -\cos x+C_2, & x>0\end{cases}$. Cum F este continuă în $x=0$, avem $\lim\limits_{x\nearrow 0}F(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}F(x)=F(0)=-1$. Adică $-1+C_1=-1+C_2=-1$, de unde $C_1=C_2=0$.

Rezultă că o primitivă a funcției este $F(x)=\begin{cases}e^x(x-1), & x\le 0\\ -\cos x, & x>0\end{cases}$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

VARIANTA 54

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Să se determine punctul în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu prima bisectoare.

5p **b)** Să se arate că valoarea minimă a funcției f este 1.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{f(x)-1}$ nu este derivabilă în $x_0=0$.

2. Se consideră funcțiile $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_2^x\dfrac{t^2}{t^2-1}dt$ și $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_0^{\ln\frac{x^2-1}{3}}\sqrt{3e^t+1}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(3)$.

5p **b)** Să se arate că $g'(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$, $\forall x\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $g(x)=2f(x)$, $\forall x\in(1,\infty)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=1\Leftrightarrow e^x-1=1$, adică $x=\ln 2$.

b) f' este negativă pe $(-\infty,0)$ și pozitivă pe $(0,\infty)$, deci valoarea minimă este $f(0)=1$.

c) $g'_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\sqrt{\dfrac{e^x-1-x}{x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (am folosit de două ori regula lui l'Hospital); $g'_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\sqrt{\dfrac{e^x-1-x}{x^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. a) $f(3)=\int_2^3\dfrac{t^2}{t^2-1}dt=\left(t+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^3=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

b) $g(x)=F\left(\ln\dfrac{x^2-1}{3}\right)-F(0)$, unde F este o primitivă a funcției $t\to\sqrt{3e^t+1}$.

Avem $g'(x)=\sqrt{3e^{\ln\frac{x^2-1}{3}}+1}\cdot\left(\ln\dfrac{x^2-1}{3}\right)'=x\cdot\dfrac{2x}{x^2-1}$, $\forall x\in(1,\infty)$.

c) $g'(x)=2f'(x)$, deci $g(x)-2f(x)=$ constant $=g(2)-2f(2)=0$.

VARIANTA 55

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

2. Fie funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_1^x f(t)\,dt\le\dfrac{x-1}{6},\forall x\in[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^6}dx$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}=-\infty$.

b) Funcția este evident derivabilă pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$. Deoarece

$f_s'(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-\infty$ (conform a)) și $f'(-2)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2}{(x+2)^2}}=\infty$,

deducem că f nu este derivabilă în $x=-2$ și în $x=1$.

c) $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$; $f'(x)=0\Rightarrow x=-1$.

Cu ajutorul tabelului de variație se verifică că $x=\pm 1$ reprezintă singurele puncte de extrem local.

x	$-\infty$		-2		-1		1		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$ |	$+$	0	$-$	| $+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

2. a) $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$; obținem $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-1$, $C=\dfrac{1}{2}$. O primitivă a funcției este de exemplu $F(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln x-\ln(x+1)+\dfrac{1}{2}\cdot\ln(x+2)$.

b) Dacă $x\ge 1$ avem $x(x+1)(x+2)\ge 6$, adică $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}\le\dfrac{1}{6}$.

Integrând pe $[1;x]$, obținem $\int_1^x f(t)dt\le\int_1^x\dfrac{1}{6}dt=\dfrac{x-1}{6}$.

c) Dacă notăm $x^3=t$ avem $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^6}dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{1}{3}(\text{arctg}1-\text{arctg}0)=\dfrac{\pi}{12}$.

VARIANTA 56

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x+4}$.

5p **a)** Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b)** Să determine limita șirului $(a_n)_{n\ge 1}$, $a_n=f(1)f(2)...f(n)$.

5p **c)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(e^x)$.

2. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e f(x)dx=e$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{3x+4}=\dfrac{2}{3}$, deci dreapta $y=\dfrac{2}{3}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}f(n+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+7}{3n+7}=\dfrac{2}{3}\in[0;1)$, deci conform criteriului raportului, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

c) $g'(x)=\dfrac{-7e^x}{(3e^x+4)^2}$; $g''(x)=\dfrac{7e^x(3e^x-4)}{(3e^x+4)^3}$.

Din $g''(x)=0$ obținem $x=\ln\dfrac{4}{3}$ și deoarece $g''(x)$ este negativă pe $\left(-\infty;\ln\dfrac{4}{3}\right)$ și pozitivă pe $\left(\ln\dfrac{4}{3};\infty\right)$, deducem că $\left(\ln\dfrac{4}{3};\dfrac{23}{24}\right)$ este singurul punct de inflexiune.

2. a) $\int_0^1 f(e^x)dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx=\left.\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\dfrac{2}{3}$.

b) $V=\pi\int_1^e f^2(x)dx=\pi\cdot\int_1^e\ln x\,dx=\pi\cdot\int_1^e x'\cdot\ln x\,dx=\pi(x\ln x-x)\Big|_1^e=\pi$.

c) Utilizând substituția $\sqrt{\ln x}=t$ obținem:

$\int_1^e\sqrt{\ln x}dx=\int_0^1 t\cdot\left(e^{t^2}\right)'dt=t\cdot e^{t^2}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{t^2}dt=e-\int_0^1 e^{t^2}dt$.

În final, $\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e\sqrt{\ln x}dx=\int_0^1 e^{x^2}dx+e-\int_0^1 e^{x^2}dx=e$.

VARIANTA 57

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=\frac{1}{2}$ și $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\geq 1$ are limită.

5p **b)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases} xf(x), x\leq 0 \\ \operatorname{arctg} x, x>0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine cel mai mare număr real a care are proprietatea $f(x)\geq a+2\ln x, \forall x\in(0,\infty)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ și F o primitivă a sa.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)+f(x)$ are exact un punct de extrem local.

Soluții

1. a) Rezultă $x_{n+1}=x_n^2+1$, de unde $x_{n+1}-x_n=x_n^2-x_n+1>0, \forall n\geq 1$, deci șirul este strict crescător. Cum orice șir monoton are limită (finită sau infinită) deducem că x_n are limită.

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} x^3+x, x\leq 0 \\ \operatorname{arctg} x, x>0 \end{cases}$. Funcția g este derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$ și $g'(x)=\begin{cases} 3x^2+1, x<0 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, x>0 \end{cases}$.

Apoi $g_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x^3+x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x^2+1)=1$;

$g_d'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\operatorname{arctg} x-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} 0}{x-0}=1$. Deoarece

$g_s'(0)=g_d'(0)=0$ rezultă g derivabilă și în 0 și $g'(0)=0$.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=f(x)-a-2\ln x$. Atunci $g'(x)=2x-\frac{2}{x}$. Pentru $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)=0$ dacă $x=1$. Se obține că 1 este punct de minim, deci $g(x)\geq g(1)=2-a$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$. Prin urmare, $g(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$ dacă și numai dacă $a\leq 2$.

2. a) $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(-2x)e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}(e^{-1}-e^0)=-\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}$.

b) Cazul $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l'Hôspital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin xF'(\cos x)}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\sin x}{2x}\cdot f(\cos x)\right)=-\dfrac{1}{2}f(1)=-\dfrac{1}{2}e^{-1}$.

c) $g'(x)=F'(x)+f'(x)=f(x)-2xe^{-x^2}=(1-2x)e^{-x^2}$.

Tabelul de variație al funcției g este:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	+ + + + +		0	− − − − −	
$g(x)$	↗		$g\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	

Din tabelul de variație rezultă că g are exact un punct de extrem local.

VARIANTA 58

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)<g(x)$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2. Fie $m\in\mathbb{R}$ și funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-m, x\in[0,1]\\ x\ln x, x\in(1,2]\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, funcția f este integrabilă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}$.

5p **c)** Pentru $m=1$, să se demonstreze că, pentru orice $t\in(0,2)$ există $a,b\in[0,2]$, $a\neq b$, astfel încât $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(t)$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$, deci

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0\cdot\dfrac{\pi}{2}=0$.

b) f este derivabilă și $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Semnul derivatei:

x		-1		1	
$f'(x)$	- - - - - - -	0	+ + + + + + + + +	0	- - - - - - - - - -

Ținând cont de semnul derivatei, rezultă că -1 este punct de minim local, iar 1 este punct de maxim local.

c) Considerăm funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-g(x)$. Rezultă $h'(x)=-\dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Deoarece $h'(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$, rezultă că h este descrescătoare pe $(0,\infty)$. Deci $h(x)<h(0), \forall x\in(0,\infty)$, adică $h(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$. Rezultă $\dfrac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg}x, \forall x\in(0,\infty)$.

2. a) Funcția f este continuă pe $[0,1]$, deci este integrabilă pe acest interval. Funcția $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=x\ln x$ este continuă, deci este integrabilă pe $[1,2]$. Deoarece $f(x)=g(x), \forall x\in[1,2]\setminus\{1\}$, rezultă că f este integrabilă pe $[1,2]$. Fiind integrabilă pe $[0,1]$ și pe $[1,2]$, rezultă f integrabilă pe $[0,2]$.

b) Fie F o primitivă a funcției $\varphi:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=t\ln t$.

Atunci: $\int_1^x t\ln t\,dt=F(x)-F(1)$. Rezultă $\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'_d(1)$.

Deoarece $F'_d(1)=\varphi(1)=0$ rezultă că limita este egală cu 0.

c) În cazul respectiv, deoarece f este continuă, ea admite o primitivă F și $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. Fie $t\in(0,2)$. Considerăm funcția $\theta:[0,2]\to\mathbb{R}$, $\theta(x)=F(x)-f(t)x$. Funcția $\theta:[0,2]\to\mathbb{R}, \theta(x)=F(x)-f(t)x$ este derivabilă și $\theta'(x)=F'(x)-f(t)=f(x)-f(t)$. Deoarece f este strict crescătoare, rezultă că θ' este strict negativă la stânga lui t, respectiv strict pozitivă la dreapta lui t.

Aceasta probează că funcția θ este strict descrescătoare la stânga lui t, respectiv strict crescătoare la dreapta lui t.

Prin urmare θ nu este injectivă, deci există $a,b\in[0,2]$, $a\neq b$, astfel încât $\theta(a)=\theta(b)$, ceea ce implică $F(a)-f(t)a=F(b)-f(t)b\Rightarrow F(a)-F(b)=(a-b)f(t)$.

VARIANTA 59

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin x$ și F o primitivă a lui f.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $c\in(1,3)$ astfel încât $\int_1^3\dfrac{f(x)}{\sin x}dx=2c^2$.

5p **c)** Să se arate că funcția F nu are limită la $+\infty$.

Soluții

1. a) $\dfrac{f(x)}{f(x+1)}=\dfrac{x^3+x}{(x+1)^3+x+1}=\dfrac{x^3+x}{x^3+3x^2+4x+2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}=1$.

b) $f'(x)=3x^2+1>0$, deci f este strict crescătoare, de unde f este injectivă.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, f este și continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci f surjectivă. f injectivă și surjectivă, deci bijectivă de unde f inversabilă.

c) Deoarece $f'(x)=3x^2+1>0$, rezultă că f este strict crescătoare și, cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}f^{-1}(x)=\infty$. Notăm $f^{-1}(x)=y$. Rezultă $x=f(y)$. Prin urmare $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{\sqrt[3]{f(y)}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{\sqrt[3]{y^3+y}}=1$.

2. a) $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_0^{\pi}f(x)dx$. Utilizând schimbarea de variabilă $x=-t$ rezultă $\int_{-\pi}^0f(x)dx=-\int_{\pi}^0f(-t)\,dt=\int_0^{\pi}f(-t)\,dt=-\int_0^{\pi}f(t)\,dt=-\int_0^{\pi}f(x)dx$ și astfel se obține că $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0$.

b) $\int_1^3\dfrac{f(x)}{\sin x}dx=\int_1^3x^2dx$; $\int_1^3x^2dx=2c^2$ dacă $\dfrac{26}{3}=2c^2$. Rezultă $c=\sqrt{\dfrac{13}{3}}\in(1,3)$.

c) $F(x)=(-x^2+2)\cos x+2x\sin x$. Considerăm șirul $(x_n')_{n\geq1}$, $x_n'=2n\pi$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n')=-\infty$. Considerând șirul $(x_n'')_{n\geq1}$, $x_n''=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n'')=\infty$.

Prin urmare funcția F nu are limită la ∞.

VARIANTA 60

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

5p **a)** Să se arate că mulțimea valorilor funcției f este $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln f(x)$, atunci $(f(x)-x)\cdot g'(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x)<x$, pentru orice $x>0$, unde g este funcția definită la punctul **b)**.

2. Fie mulțimea

$M=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\,f\text{ este derivabilă și }\int_0^1f(x)\,dx=f(0)=f(1)\right\}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+x$ aparține mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că dacă f este o funcție polinomială de grad trei, care aparține lui M, atunci $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(0)$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $f\in M$, ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\neq0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(0)>0$, deci f' are semn constant pozitiv, rezultă că f este strict crescătoare, continuă, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=0$, de unde concluzia.

b) Din $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă relația cerută.

c) Fie $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=g(x)-x$. Avem $\varphi'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}-1$. Deoarece φ este continuă și $\varphi'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}^*$, rezultă φ strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ prin urmare, pentru orice $x>0$ avem $\varphi(x)<\varphi(0)$. Cum $\varphi(0)=0$, se obține inegalitatea cerută.

2. a) Funcția f fiind o funcție polinomială, este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

$\int_0^1f(x)\,dx=\dfrac{2x^4}{4}\Big|_0^1-\dfrac{3x^3}{3}\Big|_0^1+\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{1}{2}=0$. Cum $f(0)=0$ și $f(1)=0$, atunci funcția f face parte din mulțimea M.

b) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$. Rezultă $\int_0^1 f(x)dx=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d$;

$f(0)=d, f(1)=a+b+c+d$. Prin urmare, condiția $f\in M$ este echivalentă cu

$\begin{cases}a+b+c=0\\ \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0\end{cases}$, de unde: $a\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ b=-\frac{3a}{2},\ c=\frac{a}{2},\ d\in\mathbb{R}$. Rezultă

$f(x)=ax^3-\frac{3a}{2}x^2+\frac{a}{2}x+d,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ d\in\mathbb{R}$. Atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=d=f(0)$.

c) Aplicăm teorema de medie. Deci există $c\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^1 f(x)dx=f(c)$.

Rezultă $f(c)=f(0)$ și $f(c)=f(1)$. Conform teoremei lui Rolle, există $\alpha\in(0,c)$ și $\beta\in(c,1)$ astfel încât $f'(\alpha)=0, f'(\beta)=0$.

VARIANTA 61

1. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este continuă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\sin^2 x)$.

5p **a)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze derivata funcției $g:(-1,1)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)\,dt$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1=f(1)$ (am folosit regula l'Hospital). Deci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{2x(x-1)}=-\frac{1}{2}$

(cu regula l'Hospital), deci f este derivabilă în 1 și $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

c) $f'(x)=\begin{cases}\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}, & x\neq 1\\ -\frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$. Pentru $x\neq 1$ rezultă $f'(x)=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$.

Considerând funcția $g(x)=x-1-x\ln x$, $x>0$, $g'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$.

x	0	1	∞
$g'(x)$	$+++$	0	$---$
$g(x)$	$-1\nearrow$	0	$\searrow-\infty$

Deci $g(x)<0$, $x>0$, $x\neq 1$. Am folosit $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$.

Rezultă $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x-1)^2}<0$, $x\neq 1$, $x>0$. Cum $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$ avem $f'(x)<0$, $\forall x>0$, deci f este strict descrescătoare.

2. a) Fie F o primitivă a funcției f. Atunci $F'(x)=f(x)=\ln(1+\sin^2 x)\geqslant \ln 1=0$. Atunci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Avem $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx=\int_0^{\pi}\ln(1+\sin^2 x)\cos x\,dx$. Facem următoarea schimbare de variabilă $t=\sin x$, de unde $dt=\cos x\,dx$.

Rezultă că $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx=\int_0^{0}\ln(1+t^2)\,dt=0$.

c) f continuă, F o primitivă a lui f, deci $g(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)dt=F(\arcsin x)-F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Avem $g'(x)=F'(\arcsin x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=f(\arcsin x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\ln(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VARIANTA 62

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f_2 este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x)=0$ are exact o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{f_2(x)-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in(-\infty,0]\\ 1+\sin x, & x\in(0,\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi,2\pi]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} f^n(x)dx\leqslant 2^n\pi$.

Soluții

1. a) $f_2(x)=x^2+\ln x$, $f_2'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$, $\forall x\in(0;\infty)$ Deci f_2 strict crescătoare pe $(0;+\infty)$.

b) Deoarece $f_n'(x)=nx^{n-1}+\dfrac{1}{x}>0$ pentru $x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ și $f_n\left(\dfrac{1}{e}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^n-1<0$; $f_n(1)=1$, rezultă că f_n este strict crescătoare pe $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ și are o singură rădăcină reală în $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{f_2(x)-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^2+\ln x-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Fie $y=x-1$; $x=y+1$. Limita de mai sus devine

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{3}{(y+1)^2+\ln(y+1)-1}-\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y-y^2-\ln(y+1)}{y^3+2y^2+y\ln(y+1)}\overset{l'H}{=}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-2y+\frac{y}{y+1}}{3y^2+4y+\ln(y+1)+\frac{y}{y+1}}=\lim_{y\to 0}\frac{y\left(-2+\frac{1}{y+1}\right)}{y\left[3y+4+\frac{\ln(y+1)}{y}+\frac{1}{y+1}\right]}=-\frac{1}{6}.$$

2. a) Fie $g:[-2\pi, 0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$ şi $h:[0, 2\pi]\to\mathbb{R}$, $h(x)=1+\sin x$.
Cum $f(x)=g(x)$, $\forall x\in[-2\pi, 0]$ şi g este integrabilă pe $[-2\pi; 0]$, atunci şi f este integrabilă pe $[-2\pi; 0]$.
Analog f este integrabilă pe $[0; 2\pi]$.
Deci f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$.

b) $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx=\int_{-1}^{0} x^3dx+\int_{0}^{\pi}(1+\sin x)dx=\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}+(x-\cos x)\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{4}+\pi+1+1=\frac{7}{4}+\pi$.

c) Demonstrăm prin inducție. Pentru $n=1$ avem
$\int_0^{2\pi} f(x)dx=\int_0^{2\pi}(1+\sin x)dx=(x-\cos x)\Big|_0^{2\pi}=2\pi-1+1=2\pi$, deci relația este adevărată pentru $n=1$. Presupunem $\int_0^{2\pi} f^n(x)dx\leqslant 2^n\pi$, atunci
$\int_0^{2\pi} f^{n+1}(x)dx=\int_0^{2\pi} f(x)\cdot f^n(x)dx\leqslant\int_0^{2\pi}2f^n(x)dx=2\int_0^{2\pi} f^n(x)dx\leqslant 2\cdot 2^n\pi=2^{n+1}\pi$
deci este adevărată pentru $n+1$ (am folosit $f(x)=1+\sin x\leqslant 2$).

VARIANTA 63

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

5p **a)** Să arate că $|f(x)|\leq|x|$, $\forall x\in[-1,1]$.

5p **b)** Să arate că funcția f este continuă în origine.

5p **c)** Să se arate că funcția f nu este derivabilă în origine.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}axe^x-x, & x\leqslant 0\\ x\cos x+b, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine a şi b ştiind că f este primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei funcții.

5p **b)** Ştiind că $a=0$ şi $b=0$, să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $b=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^n f(x)dx=-\infty$.

Soluții

1. a) Dacă $x\in\mathbb{Q}$, avem $|f(x)|\leqslant|x|$; $|x|\leqslant|x|$, adevărat pentru orice $x\in[-1; 1]$. Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $|f(x)|\leqslant|x|$; $|x^3|\leqslant|x|$; $|x|\left(|x|^2-1\right)\leqslant 1$, adevărat pentru orice $x\in[-1; 1]$. Deci $|f(x)|\leqslant|x|$ pentru orice $x\in[-1; 1]$.

b) Deoarece $f(0)=0$, putem aplica definiția. Considerând o vecinătate V a lui $0=f(0)$, există o vecinătate U a lui 0 astfel încât pentru orice $x\in U$, rezultă $f(x)\in V$.
Într-adevăr, putem lua $U=V$, deoarece dacă $x\in\mathbb{Q}$ avem $f(x)=x\in V$ şi dacă $x\notin\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3\in V$, deoarece pentru $x\in(0, 1)$, $-x<-x^3<x^3<x$, deci $f(x)\in V$, $\forall x\in U$.
Deci f este continuă în $x=0$.

c) Fie $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $x\neq 0$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)=1$,
$\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{2}n^3}=0$ rezultă că f nu este derivabilă în 0.

2. a) Rezultă că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$; deci f continuă $\Rightarrow b=0$.
$f'(x)=\begin{cases}ae^x+axe^x-1, & x<0,\ f'_s(0)=a-1\\ \cos x-x\sin x, & x>0,\ f'_d(0)=1\end{cases}$. Deci $a=2$, $b=0$.

b) $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(-x)\,dx+\int_0^{\pi} x\cos x\,dx=$
$=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\int_0^{\pi} x(\sin x)'dx=\frac{1}{2}+x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{2}+\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}-1-1=-\frac{3}{2}$.

c) $\int_0^{\pi} x^n f(x)dx = \int_0^{\pi} x^{n+1}\cos x dx = \int_0^{\pi} x^{n+1}(\sin x)'dx = x^{n+1}\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(n+1)x^n \sin x dx =$

$= -\int_0^{\pi}(n+1)x^n \sin x dx = -(n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin x dx$; deoarece $\sin x \geqslant 0$ pentru $x \in [0, \pi]$

avem $\int_0^{\pi} x^n \sin x dx \geqslant \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^n \underbrace{\sin x}_{\geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}} dx \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^n dx = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c^n$, $c \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $c > 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{12} c^n = \infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi} x^n \sin x dx = \infty$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi} x^n f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}[-(n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin x dx] = -\infty$.

VARIANTA 64

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-2)$.

5p **b)** Să calculeze limita șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $a_n = f(1)+f(2)+\ldots+f(n)-\ln\frac{n(n+1)}{2}$.

5p **c)** Să se arate că există un punct $c\in(1,2)$ astfel încât $(c-1)f'(c)+f(c)=f(2)$.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\frac{\pi}{4}\leqslant\int_0^1 f(x)dx\leqslant 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2}dx$.

Soluții

1. a) $f'(x) = \frac{x}{x+2}\cdot\frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{x^2+2x}$, $f''(x) = -2\cdot\frac{-2x-2}{(x^2+2x)^2}$, deci $f''(x) = 4\cdot\frac{x+1}{(x^2+2x)^2} < 0$ pentru $x\in(-\infty,-2)$, deci f este concavă pe $(-\infty,-2)$.

b) $f(n) = \ln(n+2)-\ln n$, $a_n = (\ln 3-\ln 1)+(\ln 4-\ln 2)+\ldots+[\ln(n+2)-\ln n]-\ln\frac{n(n+1)}{2} =$

$= \ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln 2-\ln\frac{n(n+1)}{2} = \ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\ln\frac{n(n+1)}{2} = \ln\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} =$

$= \ln\frac{n+2}{n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) Aplicăm teorema lui Rolle funcției $g(x) = (x-1)f(x)-xf(2)$. Într-adevăr, g continuă și derivabilă pe $(1, 2)$, $g(1) = -f(2)$, $g(2) = f(2) - 2f(2) = -f(2)$, deci $g(1) = g(2)$, rezultă că există $c\in(1, 2)$ astfel încât $g'(c)=0$, de unde relația cerută.

2. a) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$.

b) Deoarece $\frac{1}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^4}\leqslant 1$ pentru $x\in[0, 1]$ rezultă $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\leqslant\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx\leqslant\int_0^1 1dx$, adică $\operatorname{arctg} x\Big|_0^1\leqslant\int_0^1 f(x)dx\leqslant 1$, deci $\frac{\pi}{4}\leqslant\int_0^1 f(x)dx\leqslant 1$.

c) $I = \int_0^1 \frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}dx = \int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'dx = \frac{f'(x)}{f(x)}\Big|_0^1$; $f'(x) = -\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$, deci

$I = -\frac{4x^3}{1+x^4}\Big|_0^1 = -2$.

VARIANTA 65

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **b)** Să se arate că $f(x)\geq 2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $f(x)\geq mx+1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $m=2$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^3 x\cos x$ și F o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

5p **a)** Să arate că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

5p **b)** Să se calculeze aria subgraficului restricției funcției f la intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=1+e^x>0$, deci f este strict crescătoare, deci injectivă.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, f continuă, atunci $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci f surjectivă.

f injectivă și surjectivă, rezultă f bijectivă.

b) Fie funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x+e^x-(2x+1)$. Deci $h(x)=e^x-x-1$.

Rezultă $h'(x)=e^x-1$.

Din tabelul de variație rezultă $h(x)=x+e^x-(2x+1)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ de unde $f(x)\geq 2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-----$	0	$+++++++$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

c) Fie funcția $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\theta(x)=x+e^x-(mx+1)$. Atunci $\theta(x)\geq\theta(0), \forall x\in\mathbb{R}$, adică 0 este punct de minim a lui θ. Conform teoremei lui Fermat, $\theta'(0)=0$. Deoarece $\theta'(x)=1+e^x-m$ rezultă $\theta'(0)=2-m=0$, de unde $m=2$.

2. a) Deoarece F este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției f, avem $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Deci $(4F(x))'=4f(x)=4\sin^3 x\cos x$. Apoi $(\sin^4 x)'=4\sin^3 x\cos x$. Deci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

b) $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt=\frac{1}{4}\sin^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$.

c) $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)\,dx=\int_0^{\pi}\sin^{6n+3}x\cos^{3n+1}x\,dx$. Facem schimbarea de variabilă $t=\cos x$, $dt=-\sin x$. Rezultă $\int_{-1}^{1} t^{3n+1}(1-t^2)^{3n+1}dt=0$.

VARIANTA 66

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-\sqrt{|1-x^2|}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f pe intervalul $(-1,1)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x^{-2}f(x)$ este mărginită.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3], f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția f are inversa g.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci are loc inegalitatea $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\alpha} g(x)dx\geq\alpha$.

Soluții

1. a) Funcția f este o compunere de funcții continue pe $\mathbb{R}$, deci este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x^2-1}, x\in(-\infty,1]\cup[1,\infty)\\ 1-\sqrt{1-x^2}, x\in(-1,1)\end{cases}$. Rezultă $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, pentru $x\in(-1,1)$.

b) $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]\\ 1-\sqrt{x^2-1}, x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=-1$;

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}+1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+1\right)=1$.

Prin urmare, ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=-x+1$.

c) Avem $g(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, x\in(0,1)\\ \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x^2}, x\in[1,\infty)\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}, x\in(0,1)\\ \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x^2}, x\in[1,\infty)\end{cases}$.

Se verifică pe rând inegalitățile: $0<\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{2}, x\in(0,1)$ și

$-1<\frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x^2}\leq 1, x\in[1,\infty)$. În concluzie, $-1\leq g(x)\leq 1$, deci g este mărginită.

2. a) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt = \ln\left|t^2+t+1\right|\Big|_0^{\frac{3}{4}} = \ln\frac{37}{16}$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $g(x)=t$, deci $x=f(t)$. Astfel rezultă $\int_1^3 g(x)dx = \int_0^1 tf'(t)dt$ şi aplicăm integrarea prin părţi, deci

$\int_1^3 g(x)dx = \int_0^1 tf'(t)dt = tf(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)dt = f(1) - \int_0^1 f(x)dx = 3 - \int_0^1 f(x)dx$.

Deci $\int_1^3 g(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 3$.

c) Din $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 3$ rezultă $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\alpha} g(x)dx + \int_{\alpha}^3 g(x)dx = 3$, deci

$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\alpha} g(x)dx = 3 - \int_{\alpha}^3 g(x)dx$, aşa încât inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $3 - \int_{\alpha}^3 g(x)dx \geq \alpha$ sau $\int_{\alpha}^3 g(x)dx \leq 3-\alpha$. Deoarece $g:[1,3]\to[0,1]$ rezultă $g(x)\leq 1, \forall \alpha \in [\alpha,3]$, din care, prin integrare rezultă $\int_{\alpha}^3 g(x)dx \leq 3-\alpha$, adică $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\alpha} g(x)dx \geq 3-3+\alpha = \alpha$.

VARIANTA 67

1. Se consideră mulţimea de funcţii
$M = \{f:[-1,1]\to\mathbb{R} \mid f$ este de două ori derivabilă şi $f(0)=0,\ f'(0)=1\}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia $u:[-1,1]\to\mathbb{R}, u(x)=e^x\sin x$ aparţine mulţimii M.

5p **b)** Să se arate că, dacă $f\in M$ şi $f(x)\neq 0,\ \forall x\in[-1,1]\setminus\{0\}$, atunci $\lim_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{x}} = e$.

5p **c)** Să demonstreze că, dacă $f\in M$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{x\to 0}\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}} = \frac{nf''(0)}{2}$.

2. Fie funcţiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x}$ şi $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $g(x)=\ln(1+x)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots f\left(\frac{n}{n}\right)\leq n\ln 2, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţii

1. a) u este derivabilă pe $[-1;1]$; $u'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$.
Şi u' este derivabilă pe $[-1;1]$, deci u este de două ori derivabilă pe $[-1;1]$.
Cum $u(0)=0$ şi $u'(0)=1$, atunci ipoteza este verificată pentru
$u(x)=e^x\sin x,\ \forall x\in[-1,1]$.

b) Suntem în cazul 1^{∞}. Dar $(1+f(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+f(x))}$. Avem de calculat $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{x}$ (cazul $\frac{0}{0}$). Cu regula lui l'Hôspital, obţinem

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1+f(x)} = \frac{f'(0)}{1+f(0)} = f'(0) = 1$. Deci $\lim_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{x}} = e$.

c) $f^n(x)-x^n = [f(x)-x]\cdot[f^{n-1}(x)+xf^{n-2}(x)+\ldots+x^{n-2}f(x)+x^{n-1}]$;

$\lim_{x\to 0}\frac{f^{n-1}(x)}{x^{n-1}}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{xf^{n-2}(x)}{x^{n-1}}=1,\ldots,\ \lim_{x\to 0}\frac{x^{n-2}f(x)}{x^{n-1}}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}}=1$;

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}\cdot\left(\frac{f^{n-1}(x)}{x^{n-1}}+\frac{xf^{n-2}(x)}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{x^{n-2}f(x)}{x^{n-1}}+\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}}\right)=\frac{nf''(0)}{2}.$$

2. a) $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)$. Rezultă $g(x)=\ln(1+x)$.

b) $\int_0^1 f^2(x)g(x)\,dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2}dx=-\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}\right)'\ln(1+x)\,dx=-\frac{1}{2}\ln 2+\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=$

$=-\frac{1}{2}\ln 2-\left(\frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\ln 2\frac{1}{2}=\frac{1-\ln 2}{2}$.

c) Notăm $s_n=\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$. Rezultă $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(\frac{n}{n}\right)=ns_n$.

Pentru funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$ și pentru fiecare $n\geq 1$ formăm diviziunea echidistantă $\Delta_n=\left(x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<\ldots<x_n=\frac{n}{n}=1\right)$, iar în fiecare interval $[x_{i-1},x_i]$ alegem punctul intermediar $c_i=x_i=\frac{i}{n}$. Astfel se observă că suma s_n este chiar suma Riemann asociată funcției f, diviziuni Δ_n și punctelor intermediare c_i: $\sigma_n(f,c_i)=\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i-x_{i-1})=s_n$. Inegalitatea din enunț rezultă din interpretarea geometrică a sumei Riemann, din faptul că funcția f convexă pe $[0,1]$ și din faptul că aria suprafeței plane cuprinse între dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$, graficul funcției și axa Ox este $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$.

VARIANTA 68

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{2x+1}{2x+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)<0,\forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$ este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este impară.

5p **b)** Să se arate că $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)\,dx\leq e-2$.

Soluții

1. a) Pentru $x>0$ rezultă $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(2x+1)-\ln(2x+3)$. Rezultă

$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+3}=\frac{1}{(x+1)^2(2x+1)(2x+3)}$.

b) Deoarece $f'(x)>0,\forall x>0$, rezultă că funcția f este strict crescătoare. Din $0<x<t$ rezultă $f(x)<f(t)$. Cum $\lim_{t\to\infty} f(t)=0$, rezultă $f(x)<0,\forall x\in(0,\infty)$.

c) $x_{n+1}-x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln\left(n+1+\frac{1}{2}\right)-\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$. Rezultă $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{2n+1}{2n+3}=f(n)<0$. Din $x_{n+1}-x_n<0$ rezultă șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2. a) Funcția f este o funcție impară prin definiție dacă $f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Utilizăm schimbarea de variabilă $t=-u$. Rezultă

$f(-x)=\int_0^{-x} e^{t^2}dt=-\int_0^x e^{u^2}du=-\int_0^x e^{t^2}dt=-f(x)$.

b) Deoarece $e^x>x,\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă $e^{t^2}>t^2$. Atunci $\int_0^x e^{t^2}dt>\int_0^x t^2dt$, de unde $\int_0^x e^{t^2}dt>\frac{x^3}{3}$. Cum $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3}=\infty$ rezultă $\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{t^2}dt=\infty$, deci $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

c) $e^{t^2}\leq e^t,\forall t\in[0,1]$. Rezultă $\int_0^x e^{t^2}dt\leq\int_0^x e^t dt,\forall x\in[0,1]$, deci $f(x)\leq e^x-1,\forall x\in[0,1]$. Prin urmare $\int_0^1 f(x)\,dx\leq\int_0^1(e^x-1)dx=e-2$.

VARIANTA 69

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în origine.

5p **b)** Să arate că, pentru orice $k\in(0,\infty)$, există $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-f(n)$, este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}$, unde funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate, folosind eventual funcția f, că $\int_0^1\ln(1+x)dx\leq\frac{5}{12}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; f este continuă pe $\mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\nearrow 0}f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$.

Dintr-o consecință a teoremei lui Lagrange, rezultă $f'_s(0)=-\infty$. Analog, $f'_d(0)=\infty$. Deci f nu este derivabilă în 0.

b) Deoarece funcția f este continuă pe intervalul $[k,k+1]$ și derivabilă pe intervalul $(k,k+1)$, aplicăm teorema lui Lagrange. Rezultă existența unui punct $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

c) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}-\left(f(n+1)-f(n)\right)$. Din **b)** rezultă că $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{c_n}}$ cu $c_n\in(n,n+1)$. Din $c_n\in(n,n+1)$ rezultă $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{c_n}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Prin urmare $a_{n+1}-a_n<0$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2. a) $\int_0^1\ln(1+x)dx=\int_0^1 x'\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=\ln 2-(x-\ln(x+1))\Big|_0^1=\ln\frac{4}{e}$. Rezultă $\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^1-\ln\frac{4}{e}=\frac{5}{12}-\ln\frac{4}{e}$.

b) Cum $F(0)=0$, aplicăm regula lui l'Hôspital. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^4}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x+x^2-\frac{1}{1+x}}{20x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{20x^3(1+x)}=\frac{1}{20}$.

c) $f'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}$. Pe $(-1,0)$ derivata f' este negativă, iar pe $(0,\infty)$ este pozitivă, rezultă că 0 este punct de minim absolut, deci $f(x)\geq f(0)=0$.

Rezultă $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)$ din care se obține $\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx\geq\int_0^1\ln(1+x)dx$.

Dar $\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{5}{12}$, deci $\int_0^1\ln(1+x)dx\leq\frac{5}{12}$.

VARIANTA 70

1. Se definește funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_0(x)=e^{2x}$ și, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin $f_n(x)=f_{n-1}'(x)$.

5p **a)** Să se arate că $f_3(x)=8e^{2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(a)+f_2(a)+\ldots+f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$, unde a este un număr real.

2. Fie funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\ln^2 x & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$.

Soluții

1. a) $f_1(x)=f_0'(x)=2e^{2x}$; $f_2(x)=f_1'(x)=2\cdot 2e^{2x}=4e^{2x}$;
$f_3(x)=f_2'(x)=4\cdot 2e^{2x}=8e^{2x}$.

b) Se demonstrează prin inducție matematică: $f_n(x)=2^n e^{2x}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2^n e^{2x}=0$, rezultă că axa Ox este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to\infty}2^n e^{2x}=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^n e^{2x}}{x}=\infty$, rezultă că f_n nu are alte asimptote oblice sau orizontale spre ∞.
$f_n(x)$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci nu are asimptote verticale.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(a)+f_2(a)+\ldots+f_{n-1}(a)}{f_n(a)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2e^{2a}+2^2e^{2a}+\ldots+2^{n-1}e^{2a}}{2^n e^{2a}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^{n-2}}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=1.$

2. a) Funcția f este continuă pe intervalul $(0,\infty)$ deoarece f se obține prin operații cu funcții continue.
Continuitatea în 0:

$$\lim_{x\searrow 0}f(x)=\lim_{x\searrow 0}x^2\ln^2(x)=\left(\lim_{x\searrow 0}x\ln(x)\right)^2=\left(\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right)^{2}\overset{l'H}{=}\left(\lim_{x\searrow 0}(-x)\right)^2=0.$$

Deci f este continuă și în 0. Rezultă f continuă pe $[0;1]$ și prin urmare este integrabilă pe $[0,1]$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1 x\ln^2 x\,dx$ și aplicând de două ori integrarea prin părți obținem:

$\int_t^1 x\ln^2 x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_t^1-\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_t^1+\dfrac{1}{4}x^2\Big|_t^1$ deci

$\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1 x\ln^2 x\,dx=\lim\limits_{t\to 0}\left(-\dfrac{t^2}{2}\ln^2 t\right)-\lim\limits_{t\to 0}\left(-\dfrac{t^2}{2}\ln t\right)+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{4}(1-t^2)=0-0+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}.$

c) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\ln^2\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\ln^2 x,\forall x\geq 1$; $\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_1^e(\ln x)'\ln^2 x\,dx=\dfrac{\ln^3 x}{3}\Big|_1^e=\dfrac{1}{3}$.

VARIANTA 71

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)>0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^2 t^x dt$.

5p **a)** Să se verifice că $1+(x+1)F(x)=2^{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-1} F(x)$.

5p **c)** Să se arate că există o funcție continuă $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, astfel încât $F(x)=1+\int_0^x f(y)dy, \forall x\in(-1,\infty)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=x'-\ln'(1+x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$.

b) $f'(x)>0, \forall x\in(0,\infty)$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. Din $x>0$ și f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, rezultă $f(x)>f(0)=0$.

c) $f(x)=x-\ln(1+x)=\ln e^x-\ln(1+x)=\ln\frac{e^x}{1+x}$.

Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\overset{l'H}{=}\infty$.

2. a) $F(x)=\int_1^2 t^x dt=\frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_1^2=\frac{2^{x+1}-1}{x+1}$. Rezultă $(x+1)\int_1^2 t^x dt=2^{x+1}-1$, adică

$1+(x+1)\int_1^2 t^x dt=2^{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Pentru $x=-1$, $1+(x+1)F(x)=2^{x+1}=1$.

b) Deoarece $\int_1^2 t^x dt=\frac{2^{x+1}-1}{x+1}$ rezultă $\lim\limits_{x\to-1}\int_1^2 t^x dx=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2^{x+1}-1}{x+1}$. Utilizăm regula lui l' Hôspital: $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2^{x+1}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}2^{x+1}\ln 2=\ln 2$. Deci $\lim\limits_{x\to-1}\int_1^2 t^x dx=\ln 2$.

c) Din teorema de existență a primitivelor unei funcții continue, rezultă că F este o primitivă a funcției f. Deci $F'(x)=f(x), \forall x\in(-1,\infty)$. Rezultă

$$f(x)=\left(\frac{2^{x+1}-1}{x+1}\right)'=\frac{(x\ln 2+\ln 2-1)2^{x+1}+1}{(x+1)^2}.$$

VARIANTA 72

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ și numărul $I_n=\int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^\pi f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Să se arate că $I_n\ge\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

Soluții

1. a) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=mx+n$;

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$, deci dreapta $y=x$ este asimptotă oblică.

b) $f'(x)=\frac{(x^2+x+1)'\cdot(x+1)-(x^2+x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

c) $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$. Rezultă $f''(x)<0, \forall x\in(-\infty,-1)$, deci funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. a) $\int_0^\pi f_2(x)dx=\int_0^\pi|\sin 2x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi=$

$=-\frac{1}{2}(-1-1)+\frac{1}{2}(1+1)=2$.

b) $\frac{|\sin(nx)|}{x}\le\frac{1}{x}, \forall x\in[\pi,2\pi]$. Rezultă $I_n=\int_\pi^{2\pi}\frac{|\sin(nx)|}{x}dx\le\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_\pi^{2\pi}=\ln 2$.

c) Facem schimbarea de variabilă $nx=t$ și obținem

$$I_n=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt=\sum_{k=n}^{2n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt\ge\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|dt=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{2}{(k+1)\pi}.$$

VARIANTA 73

1. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x^2-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^x$.

5p **b)** Să se determine valoarea numărului a ştiind că 3 este punct de extrem local al funcţiei f.

5p **c)** Să se determine valoarea numărului a ştiind că graficul funcţiei f are exact o asimptotă verticală.

2. Se consideră funcţia $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ şi, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, se defineşte funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f_1^2(x)=2f_2(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei $g:[0,\pi]\to[0,\pi]$, $g(x)=f_1(x)\sin x$ în jurul axei Ox.

Soluţii

1. a) $\left(f(x)\right)^x=\left(1+\dfrac{x+a+1}{x^2-1}\right)^x=\left[\left(1+\dfrac{x+a+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x+a+1}}\right]^{\frac{x^2+(a+1)x}{x^2-1}}$, deci limita este e.

b) $f'(x)=-\dfrac{x^2+2(a+1)x+1}{(x^2-1)^2}$, $x\neq\pm1$. Dacă $x_0=3$ este punctul de extrem local şi f este derivabilă în 3, atunci $f'(3)=0$, rezultă $a=-\dfrac{8}{3}$. Pentru $a=-\dfrac{8}{3}$, din semnul lui f' avem că $x_0=3$ este punct de extrem.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+a$. Dacă $g(1)\neq0$, $g(-1)\neq0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ atunci f are două asimptote verticale, $x=1$ şi $x=-1$. Este necesar ca $g(1)=0$ sau $g(-1)=0$, adică $a=-2$ sau $a=0$.

2. a) $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt=\int_0^x 1dt=t\big|_0^x=x$.

Atunci $f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt=\int_0^x tdt=\dfrac{t^2}{2}\Big|_0^x=\dfrac{x^2}{2}$. Rezultă că $f_1^2(x)=2f_2(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Se demonstrează prin inducţie după $n\in\mathbb{N}^*$ că: $xf_n(x)=(n+1)f_{n+1}(x)$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)f_{n+1}(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}=n+1$ (deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}f_{n+1}(x)=\infty$).

c) $V=\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_0^\pi(x^2\sin^2x)dx=\pi\int_0^\pi x^2\cdot\dfrac{1-\cos2x}{2}dx=\dfrac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi x^2dx-\int_0^\pi x^2\cos2xdx\right)$

$I_1=\int_0^\pi x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^\pi=\dfrac{\pi^3}{3}$; $I_2=\int_0^\pi x^2\cos2xdx=\int_0^\pi x^2\left(\dfrac{\sin2x}{2}\right)'dx=$

$=\dfrac{x^2}{2}\sin2x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi x\sin2xdx=\left(\dfrac{\pi^2}{2}\underbrace{\sin2\pi}_{0}-0\right)-\int_0^\pi x\sin2xdx=-\int_0^\pi x\sin2xdx=$

$=\int_0^\pi x\left(\dfrac{\cos2x}{2}\right)'dx=\dfrac{x\cos2x}{2}\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\dfrac{\cos2xdx}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\underbrace{\dfrac{\sin2x}{4}\Big|_0^\pi}_{0}=\dfrac{\pi}{2}$.

$V=\left(\dfrac{\pi^3}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi^4}{6}-\dfrac{\pi^2}{4}$.

VARIANTA 74

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\int_1^2\left(\dfrac{t}{x}-e^x\right)^2dx$ și numerele $A=\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx$, $B=\int_1^2\dfrac{e^x}{x}dx$.

5p **a)** Să se arate că $f(t)=At^2-2Bt+\dfrac{e^4-e^2}{2}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $f(2B-t)=f(2B+t),\forall t\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\left(\int_1^2\dfrac{e^x}{x}dx\right)^2\leqslant\left(\int_1^2e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx\right)$.

Soluții

1. a) Cum D_f mărginit, atunci G_f nu are asimptote orizontale, nici oblice.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>-2}}\ln\dfrac{2+x}{2-x}=\ln0=-\infty$, de unde $x=-2$ asimptotă verticală la dreapta.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\ln\dfrac{2+x}{2-x}=\ln\infty=\infty$, de unde $x=2$ asimptotă verticală la stânga.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{2+x}{2-x}}\cdot\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)'=\dfrac{2-x}{2+x}\cdot\dfrac{2-x-(2+x)(-1)}{(2-x)^2}=\dfrac{4}{4-x^2}$

Cum $x\in(-2;2)$ rezultă $4-x^2>0$, de unde $f'(x)>0$, adică f este strict crescătoare pe $(-2;2)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{2x+1}{2x-1}\overset{\infty\cdot0}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{2x-1}}=$

$=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-1}}=\ln e=1$.

2. a) $\int_1^2e^{2x}dx=\dfrac{e^{2x}}{2}\Big|_1^2=\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{e^2}{2}=\dfrac{e^4-e^2}{2}$.

Atunci $f(t)=\int_1^2\left(\dfrac{t}{x}-e^x\right)^2dx=\int_1^2\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot t^2-2\cdot\dfrac{e^x}{x}\cdot t+e^{2x}\right)dx=$

$=\int_1^2\dfrac{1}{x^2}\cdot t^2dx-\int_1^2 2\cdot\dfrac{e^x}{x}tdx+\int_1^2e^{2x}dx=At^2-2Bt+\dfrac{e^4-e^2}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) $f(2B-t)-f(2B+t)=\int_1^2\left[\left(\dfrac{2B-t}{x}-e^x\right)^2-\left(\dfrac{2B+t}{x}-e^x\right)^2\right]dx=$

$=\int_1^2\left(\dfrac{2B-t}{x}-e^x-\dfrac{2B+t}{x}+e^x\right)\left(\dfrac{2B-t}{x}-e^x+\dfrac{2B+t}{x}-e^x\right)dx=\int_1^2\dfrac{-2t}{x}\cdot\left(\dfrac{4B}{x}-2e^x\right)dx=$

$=\int_1^2\dfrac{-8tB}{x^2}dx+\int_1^2\dfrac{4te^x}{x}dx=-8Bt\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2+4t\cdot B=-8Bt\cdot\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)+4tB=$

$=-8Bt\cdot\dfrac{1}{2}+4tB=0$. Atunci $f(2B-t)=f(2B+t)$.

c) Cum $\left(\dfrac{t}{x}-e^x\right)^2\geqslant0$, $\forall t\in\mathbb{R}$, atunci $f(t)\geqslant0$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

$f(t)=\int_1^2\dfrac{t^2}{x^2}dx-2\int_1^2\dfrac{t}{x}e^xdx+\int_1^2e^{2x}dx$; $f(t)=t^2\cdot\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx-2t\cdot\int_1^2\dfrac{e^x}{x}dx+\int_1^2e^{2x}dx$

$f(t)\geqslant0$, $\forall t\in\mathbb{R}$, atunci $\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx>0$ și $\Delta\leqslant0$

$\Leftrightarrow4\left(\int_1^2\dfrac{e^x}{x}dx\right)^2-4\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx\cdot\int_1^2e^{2x}dx\leqslant0;\left(\int_1^2\dfrac{e^x}{x}dx\right)^2\leqslant\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx\cdot\int_1^2e^{2x}dx$

VARIANTA 75

1. Se consideră $\alpha\in\mathbb{R},\alpha>1$ şi funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^{\alpha}-\alpha x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcţiei f.

5p **b)** Să se demonstreze că $(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x, \forall x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}, \forall\alpha\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $2f(x+y)\leq f(2x)+f(2y), \forall x,y\in[0,\infty)$.

2. Fie funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^3 f^2(x)[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)-\int_0^n f(x)dx$, este convergent.

Soluţii

1. a) $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha[(1+x)^{\alpha-1}-1]$; $f'(x)=0$ dacă $(1+x)^{\alpha-1}=1$. Cum $\alpha-1>0$ rezultă $1+x=1$, deci $x=0$.

x	-1		0	
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$ $+$ $+$
$f(x)$	$\searrow$		1	$\nearrow$

Din tabelul de variaţie al funcţiei se observă că f este strict descrescătoare pe $(-1;0]$ şi strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.

b) $f(0)=1$. Din a) rezultă $f(x)>1$, $\forall x\neq 0$. Deci $(1+x)^{\alpha}-\alpha x>1$, adică $(1+x)^{\alpha}>\alpha x+1$.

c) $f''(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot(1+x)^{\alpha-2}>0$, rezultă f convexă.

$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$, $\forall t\in[0;1]$, adevărată pentru $t=\dfrac{1}{2}$; deci

$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leq\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]$. Înlocuim $x\to 2x$ şi $y\to 2y$ şi obţinem

$f(x+y)\leq\dfrac{1}{2}[f(2x)+f(2y)]$, $2f(x+y)\leq f(2x)+f(2y)$.

2. a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{x}{1+x}dx=\int_0^1\dfrac{x+1-1}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=x\Big|_0^1-\ln(x+1)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

b) $\int_1^3 f^2(x)[x]dx=\int_1^2 f^2(x)dx+2\int_2^3 f^2(x)dx=$

$=\left(x-2\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x}\right)\Big|_1^2+2\left(x-2\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x}\right)\Big|_2^3=\dfrac{10}{3}-6\ln 2+2\ln 3$.

c) $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_0^{n+1}f(x)dx+\int_0^n f(x)dx=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)dx=$

$=\int_n^{n+1}(f(n+1)-f(x))dx$; $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0, \forall x$, deci f este crescătoare, de unde rezultă că a_n este crescător (deoarece pentru $x\in[n,n+1]$, avem $f(x)<f(n+1)$).

Dar $a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(f(k)-\int_{k-1}^{k}f(x)dx\right)$;

$f(k)-\int_{k-1}^{k}f(x)dx=f(k)-f(c)=\dfrac{k}{1+k}-\dfrac{c}{1+c}=\dfrac{k-c}{(1+k)(1+c)}\leq\dfrac{1}{k(k+1)}$, căci $k-1\leq c$.

Rezultă $a_n\leq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}\leq 1$, adică (a_n) este mărginit superior. În concluzie, (a_n) este convergent.

VARIANTA 76

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f(x)=0$ are o soluție unică $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xe^x-1}{x-x_0}=f'(x_0)$, unde x_0 este numărul definit la punctul **b)**.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n=\int_0^1\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine I_1.

5p **b)** Să se arate că șirul I_n este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$ (se consideră cunoscut faptul că $\ln(1+t)\leq t$, $\forall t\in(-1,\infty)$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\infty$;

b) Funcția este strict crescătoare, continuă și $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1<0$, $f(1)=1>0$ de unde rezultă că $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ este unica soluție.

c) Folosind regula lui l'Hôspital pentru cazul $\frac{0}{0}$ vom avea

$l=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xe^x-1}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x+1)e^x=(x_0+1)e^{x_0}$. Din $f(x_0)=0$, rezultă că

$x_0=-\ln x_0=\ln\frac{1}{x_0}$, deci $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$ și $l=(x_0+1)\frac{1}{x_0}=1+\frac{1}{x_0}=f'(x_0)$.

2. a) $I_1=\int_0^1\frac{1}{x+1}\ln(x+1)\,dx=\frac{1}{2}\ln^2(x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln^2 2$.

b) $x\in(0,1)\Rightarrow x^n>x^{n+1}$ și $\frac{1}{x+1}>0$; vom avea $\frac{\ln(1+x^n)}{x+1}>\frac{\ln(x^{n+1}+1)}{x+1}$, $\forall x\in(0,1)$, de unde rezultă concluzia.

c) Avem $I_n\geqslant 0$ și $I_n\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqslant\int_0^1x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$. Din teorema cleștelui va rezulta concluzia.

VARIANTA 77

1. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $xf(x)=e^x-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că funcția f este continuă în $x=0$ dacă și numai dacă $f(0)=1$.

5p **c)** Să se arate că dacă funcția f este continuă în $x=0$, atunci ea este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_1^2((x-1)(2-x))^n dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $2(2n+1)I_n=nI_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Soluții

1. a) $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ pentru $x\in\mathbb{R}^*$; $f(1)=e-1$; $f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}$; $f'(1)=1$;

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$; $y-e+1=x-1$. Ecuația tangentei este $y=x+e-2$.

b) Cum $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, atunci f este continuă în $x=0$ dacă $f(0)=1$.

c) Din **b)** știm că, dacă f este continuă în $x=0$, atunci $f(0)=1$. Atunci

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$.

Cum f este derivabilă și pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, atunci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. a) $I_1=\int_1^2(x-1)(2-x)dx=\int_1^2(-x^2+3x-2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2=\frac{1}{6}$.

b) $I_n=\int_1^2(-x^2+3x-2)^n dx=\int_1^2x'(-x^2+3x-2)^n dx=x(-x^2+3x-2)^n\Big|_1^2-$

$-\int_1^2nx(-x^2+3x-2)^{n-1}\cdot(-2x+3)dx=-n\int_1^2(-x^2+3x-2)^{n-1}\cdot(-2x^2+3x)dx=$

$=-n\int_1^2(-x^2+3x-2)^{n-1}\cdot[(-2x^2+6x-4)-3x+4]dx=-2n\int_1^2(-x^2+3x-2)^n\cdot dx-$

$-n\int_1^2(-x^2+3x-2)^{n-1}\cdot(-3x+4)dx=-2nI_n-\frac{3}{2}n\int_1^2(-x^2+3x-2)^{n-1}\cdot\left[(-2x+3)-\frac{1}{3}\right]dx=$

$=-2nI_n-\frac{3n}{2}\int_1^2(-x^2+3x-2)^{n-1}\cdot(-x^2+3x-2)'dx+\frac{n}{2}I_{n-1}=$

$=-2nI_n-\frac{3n}{2}\cdot\int_1^2\left[\frac{(-x^2+3x-2)^n}{n}\right]'dx+\frac{n}{2}I_{n-1}$. Rezultă $I_n=-2nI_n+\frac{n}{2}I_{n-1}$, $2(2n+1)I_n=nI_{n-1}$.

c) $I_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[1;2]$. Avem $I_n=\frac{n}{2(2n+1)}I_{n-1}$, deci $I_k<\frac{1}{4}x_{k-1}$; $k=\overline{2,n}$ și înmulțindu-le membru cu membru, deducem că:

$I_n<\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}I_1$, deci $0<I_n<\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, deci $I_n\to 0$.

VARIANTA 78

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\operatorname{arctg} f(x)-\pi)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{3+\cos x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-3x+2}=+\infty$, deci nu există asimptotă orizontală.

$$y=mx+n;\ m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x}=1,$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt[3]{x^3-3x+2}-x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x+2}+x^2}=0.$$

Rezultă $y=x$ asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$, Funcția nu este derivabilă în $x=-2$ și $x=1$ și $f'(x)=0\Rightarrow x=-1$. Facem tabelul de variație:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Observăm că punctul critic $x=-1$ este punct de maxim local și punctul $x=1$ (în care funcția nu este derivabilă) este punct cu minim local.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\operatorname{arctg} f(x)-\pi)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\operatorname{arctg} f(x)-\pi}{\frac{1}{x}}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{1+f^2(x)}f'(x)}{-\frac{1}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2f'(x)}{1+f^2(x)}=-2\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}+\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^4}}=-2.$$

2. a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{3+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\left(2+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{1}{t^2+2}dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

b) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f, deci $F'(x)=f(x)$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Dar $f(x)>0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, deoarece $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$, deci F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{x^2}\overset{l'H}{=}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x(3+\cos x)}=0$.

Observație: $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$ deoarece $f(x)\geqslant\dfrac{1}{4}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ și $\int_0^x f(t)dt\geqslant\dfrac{x}{4}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt=+\infty$.

VARIANTA 79

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{3x}+2x+1$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(f(-1)+f(-2)+f(-3)+...+f(-n)+n^2)$.

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=1$ și $a_{n+1}=\int_0^{a_n}\sin\pi x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze a_1.

5p **b)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Soluții

1. a) $f'(x)=3e^{3x}+2\Rightarrow m=f'(0)=5$; $f(0)=2$. Ecuația tangentei este $y-2=5x$, sau $y=5x+2$.

b) $f'(x)>0$ rezultă că f este strict crescătoare, deci este o funcție injectivă (*)

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{3x}+2x+1)=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{3x}+2x+1)=-\infty$;

f este o funcție continuă pe $\mathbb{R}$. Rezultă că $\text{Im}\,f=\mathbb{R}$, deci funcția este surjectivă (**)

Din (*) și (**) rezultă că funcția este bijectivă, deci inversabilă.

c) $N=f(-1)+f(-2)+f(-3)+...+f(-n)+n^2=$

$=e^{3\cdot(-1)}+2(-1)+1+$

$+e^{3\cdot(-2)}+2(-2)+1+$

$+e^{3\cdot(-3)}+2(-3)+1+$

.....

$+e^{3\cdot(-n)}+2(-n)+1+n^2=\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^6}+\frac{1}{e^9}+....+\frac{1}{e^{3n}}-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n+n^2=$

$=\frac{1}{e^3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{e^3}\right)^n-1}{\frac{1}{e^3}-1}=\left(\frac{1}{e^{3n}}-1\right)\cdot\frac{1}{e^3}\cdot\frac{e^3}{1-e^3}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}N=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{3n}}-1\right)\cdot\frac{1}{1-e^3}=\frac{1}{e^3-1}$.

2. a) $a_1=\int_0^{a_0}\sin\pi x dx=\int_0^1\sin\pi x dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^1(\cos\pi x)'dx=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=-\frac{1}{\pi}(-1-1)=\frac{2}{\pi}$.

b) $a_{n+1}=\int_0^{a_n}\sin\pi x dx\leq\int_0^{a_n}1dx=a_n$, deci $(a_n)_{n\geq 0}$ este șir descrescător (1).

Avem $a_{n+1}=\frac{-\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^{a_n}=\frac{-\cos\pi a_n}{\pi}+\frac{1}{\pi}$. Cum $-1\leq\cos x\leq 1$, avem

$-\frac{1}{\pi}\leq\frac{\cos\pi a_n}{\pi}\leq\frac{1}{\pi}$, $0\leq a_{n+1}\leq\frac{2}{\pi}$, deci $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit (2).

Din (1) și (2), pe baza teoremei lui Weierstrass, rezultă că $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

c) Fie $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$. Trecând la limită în relația $a_{n+1}=\frac{1}{\pi}-\frac{\cos\pi a_n}{\pi}$ avem

$\pi\cdot l=1-\cos\pi l$, $l\in\left[0;\frac{2}{\pi}\right)$.

Notăm $\pi\cdot l=x$ și avem ecuația $x+\cos x=1$, $x\in[0;2)$.

Considerăm funcția $f(x)=x+\cos x-1$ și $f'(x)=1-\sin x\geq 0$, deci f este monoton crescătoare, adică f este injectivă, deci $x+\cos x-1=0$ are cel mult o soluție $x_0=0$ rezultă $\pi l=0$, dacă $l=0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

VARIANTA 80

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia functiei f.

5p **b)** Să se arate că $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=\sqrt{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{nx^n}{x^n+1}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=\ln 2-\int_0^1 \ln(1+x^n)dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; pentru $x<0$, $f'(x)<0$, deci f este strict descrescătoare, iar pentru $x>0$, $f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare.

b) $f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$;

$(x^2+1)\cdot\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, deci nu există asimptotă orizontală.

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$; $n=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$. Rezultă că $y=-x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

2. a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1}{x+1}dx-\int_0^1\frac{dx}{x+1}=x\Big|_0^1-\ln(x+1)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

b) $I_n=\int_0^1 x\cdot\frac{n\cdot x^{n-1}}{x^n+1}dx=\int_0^1 x[\ln(x^n+1)]'dx=x\ln(x^n+1)\Big|_0^1-\int_0^1\ln(x^n+1)dx$, deci

$I_n=\ln 2-\int_0^1\ln(x^n+1)dx$.

c) $0\leq\ln(1+x^n)\leq x^n$, $(\forall)x\in(0,1]$ și $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, deci

$0\leq\int_0^1\ln(1+x^n)dx\leq\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$; $0\leq\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\ln(1+x^n)dx\leq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$.

Utilizând criteriul cleștelui rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\ln(1+x^n)dx=0$ și deci din b) avem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\ln 2$.

VARIANTA 81

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că funcția admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x t^3\sqrt{t^2+1}\,dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $f(1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^5}$.

Soluții

1. a) $f(1)=0$; $f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\frac{x^2+x-1}{x^2}$; $f'(1)=\frac{1}{e}$. Ecuația tangentei la G_f în $x=1$ este $y=\frac{1}{e}(x-1)$.

b) $f'(x)=0$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ punct de maxim local; $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ punct de minim local.

c) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)-e^{-\frac{1}{x}}=-2$, deci $y=x-2$ este asimptota oblică spre $+\infty$.

2. a) $f'(x)=x^3\sqrt{x^2+1}$, $\forall x\in[0,+\infty)$; $f'(x)\geq 0$, $\forall x\geq 0$. Deci f este strict crescătoare $\forall x\in[0,+\infty)$.

b) $f(1)=\int_0^1 t^3\sqrt{t^2+1}dt=\int_1^{\sqrt{2}}(u^4-u^2)du=\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}$, unde $u=\sqrt{t^2+1}$.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{5x^4}=\frac{1}{5}$ (din teorema lui l'Hôspital) rezultă că limita cerută este $\frac{1}{5}$.

VARIANTA 82

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$.

2. Fie funcţia $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to(0,\infty)$, $f(x)=\int_0^x\dfrac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5p **b)** Să se arate că f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

Soluţii

1. a) $a_1=\sqrt{2+a_0}=\sqrt{2+\sqrt{3}}>\sqrt{3}=a_0$, deci $a_1>a_0$. Prin inducţie matematică se arată că $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător. Admitem că $a_{k+1}>a_k$, $k\in\mathbb{N}$, deci $\sqrt{2+a_{k+1}}>\sqrt{2+a_k}$, adică $a_{k+2}>a_{k+1}$, ceea ce încheie demonstraţia.

b) $a_0<2$, $a_k<2$ implică $a_{k+1}<2$, deci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior; (a_n) este crescător (punctul **a)**), deci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

c) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2+a_{n+1}}+\sqrt{2+a_n}}=\dfrac{1}{4}$.

2. a) $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}^2 t+\operatorname{tg}t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}((\operatorname{tg}t)'+\operatorname{tg}t-1)dt=1-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

b) $f'(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)\sin x}{\cos^2 x}$, $\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$; $f'(x)>0$ deci f este crescătoare.

c) Pentru $l=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ avem cazul $\dfrac{0}{0}$. Aplicând l'Hospital obţinem

$l=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{(\sin x+\cos x)\sin x}{2x\cos^2 x}=\dfrac{1}{2}$.

VARIANTA 83

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$.

5p **a)** Să se arate că dreapta de ecuaţie $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f.

5p **b)** Să se arate că graficul funcţiei f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se studieze derivabilitatea funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f_n:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{\cos^n x+\sin^n x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcţiei f_4, atunci $F''(x)=(f_4(x))^2\sin 4x$, $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x f_1(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x f_1(x)dx=\dfrac{\pi-1}{4}$.

Soluţii

1. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\infty$. Atunci dreapta $x=1$ este asimptotă verticală.

b) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)=1$; deci $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

c) $f'(x)=\dfrac{x^2-x-1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}$, pentru $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; $f'(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}}$, pentru $x\in(-1;1)$. Cercetăm derivabilitatea în punctul $x=-1$.

$f'_d(-1)=\lim\limits_{x\searrow -1}\dfrac{-x^2-x+1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}}=\lim\limits_{x\searrow -1}\dfrac{-x^2-x+1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}=-\infty$, deci f nu este derivabilă în $x=-1$.

În concluzie f este derivabilă pe tot domeniul de definiţie cu excepţia punctului $x=-1$.

2.a) $f_1(x)=\dfrac{1}{\cos x+\sin x}$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{f_1(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1+1=2$

b) F primitivă a lui f_4, atunci $F'(x)=f_4(x)$ și

$$F''(x)=f_4'(x)=\frac{4\sin x\cos^3 x-4\cos x\sin^3 x}{(\cos^4 x+\sin^4 x)^2}=$$

$$=(f_4(x))^2\cdot 4\sin x\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=(f_4(x))^2\cdot 2\sin 2x\cos 2x=(f_4(x))^2\sin 4x.$$

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $y=\frac{\pi}{2}-x$. Astfel, vom avea

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}(-1)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 y}{\sin y+\cos y}dy=J,$$

iar $2I=I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$, de unde

$I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi-1}{4}$.

VARIANTA 84

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(f(n)-f(n+1)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t}(t^2-3t+2)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)>0$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$; f strict descrescătoare pe $(-\infty,1)$ și strict crescătoare pe $(1,\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$; nu avem asimptotă spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=-\infty$ rezultă $x=0$ este asimptotă verticală.

c) $f'(c)=\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}$, $f(n+1)-f(n)=\frac{e^c(c-1)}{c^2}$, $c\in(n,n+1)$. Avem

$$\frac{e^n(n-1)}{n^2}<f(n+1)-f(n)<\frac{e^{n+1}\cdot n}{(n+1)^2}\Big|\cdot n^2;\quad e^n(n-1)<n^2(f(n+1)-f(n))<\frac{e^{n+1}n^3}{(n+1)^2};$$

$\lim n^2(f(n)-f(n+1))=-\infty$ (criteriul cleștelui).

2. a) $f(1)=\int_0^1 e^{-t}(t^2-3t+2)dt>0$, deoarece $e^{-t}(t^2-3t+2)\geqslant 0, t\in[0,1]$.

b) $f'(x)=e^{-x}(x^2-3x+2)=0$ pentru $x=1$ (punct de maxim local) și $x=2$ (punct de minim local).

c) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)$; $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(-x)}{2x}=-5$.

VARIANTA 85

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n}t\,dt,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent la 0.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, deci dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, deci dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$; $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=0$,

$\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=+\infty$, deci dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta spre ∞.

b) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $f''(x)=-\dfrac{-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\cdot x^2-e^{\frac{1}{x}}\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$,

$f''(x)=0$, rezultă $2x+1=0;x=-\dfrac{1}{2}$, $e^{\frac{1}{x}}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}^*, x^4>0$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Atunci $x=-\dfrac{1}{2}$ este singurul punct de inflexiune.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}x^2\left(e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}\dfrac{-x^2}{x(x+1)}\cdot\dfrac{e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1}{-\frac{1}{x(x+1)}}=-1$.

2. a) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\operatorname{tg}^2x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dx=\operatorname{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$.

b) $I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{tg}^{2n}x(\operatorname{tg}^2x+1)-\operatorname{tg}^{2n}x\right]dx=\dfrac{\operatorname{tg}^{2n+1}x}{2n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n;\ I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$.

c) Pentru $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ avem $\operatorname{tg}x\in[0;1]$; $\operatorname{tg}^{2n}x>\operatorname{tg}^{2n+2}x$, deci $I_{n+1}<I_n$, adică (I_n) este descrescător. $I_n>0$, deci $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior; rezultă (I_n) este convergent la 0.

VARIANTA 86

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}f(2)f(3)\ldots f(n)\right)^{n^2}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2}, \forall n\geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x\,dx$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}$; $f'(0)=0$, $f(0)=-1$; ecuația tangentei la G_f în $x=0$ este $y+1=0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, deci dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, deci dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$;

$\lim\limits_{x\nearrow -1}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1}f(x)=-\infty$, deci dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală.

c) $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{(k-1)(k(k+1)+1)}{(k+1)(k(k-1)+1)}$; $\dfrac{3}{2}f(2)f(3)\ldots f(n)=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$;

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n^2+n+1-n^2-n}{n^2+n}\right)^{\frac{n^2+n}{1}}\right]^{\frac{n^2}{n^2+n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}}=e.$$

2. a) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.

b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2x\,dx=$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$, de unde rezultă relația.

c) $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow 0\leqslant\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 0\leqslant\sin^n x\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\Rightarrow 0\leqslant I_n\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\leqslant I_n\leqslant\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ și din teorema cleștelui obținem că $I_n\to 0$.

VARIANTA 87

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=1$ și $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x+1)-f(x)\leqslant 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{3-x}$ și $g(x)=\frac{\ln(3-x)}{x}$, $\forall x\in(0,3)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e(3-x)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 g(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{t\searrow 0}\int_t^1 g(x)dx=+\infty$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare.

b) $x_2=f(x_1)=\ln(1+\sqrt{2})\in(0,1)$ și, prin inducție, obținem $0<x_{n+1}<x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul este descrescător și mărginit, deci convergent.

c) Folosind teorema lui Lagrange obținem $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)=\frac{1}{\sqrt{1+c_x^2}}\leqslant 1$.

2. a) $\int_1^e\ln x dx=x\ln|_1^e-\int_1^e 1dx=e-(e-1)=1$

b) Utilizând schimbarea de variabilă $x=3-t$,

$\int_1^2 f(x)dx=\int_2^1\frac{\ln(3-t)}{t}(-1)dt=\int_1^2\frac{\ln(3-t)}{t}dt=\int_1^2 g(x)dx$.

c) $\int_t^1\frac{\ln(3-x)}{x}dx=\int_t^{3-e}\frac{\ln(3-x)}{x}dx+\int_{3-e}^1\frac{\ln(3-x)}{x}dx=\int_t^{3-e}\frac{\ln(3-x)}{x}dx+k$;

$\frac{\ln(3-x)}{x}>\frac{1}{x}$ pentru $x\in(0,3-e)$; rezultă

$\lim\limits_{t\to 0}\int_t^{3-e}\frac{\ln(3-x)}{x}dx>\lim\limits_{t\to 0}\int_t^{3-e}\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{t\to 0}[(3-e)-\ln t]=\infty$.

VARIANTA 88

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-f(x)}{x^3}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x-1)f(x)$ admite exact un punct de extrem.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 x^n\sin x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{2n}+2n(2n-1)I_{2n-2}=2n\sin 1-\cos 1$, $\forall n\geq 2$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. Deci ecuația tangentei este $y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}(x-1)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3(1+x^2)}=\dfrac{1}{3}$

c) Se arată că ecuația $g'(x)=0$, are o singură rădăcină reală.

2. a) $I_1=\int_0^1 x\sin x=-x\cos x\big|_0^1+\int_0^1\cos x dx=\sin 1-\cos 1$.

b) $x^n>x^{n+1}\Rightarrow I_n>I_{n+1}$; $\sin x>0\Rightarrow I_n>0$; $(I_n)_{n\geq 1}$ descrescător și mărginit, deci $(I_n)_{n\geq 1}$ convergent.

c) $I_{2n}=\int_0^1 x^{2n}(-\cos x)'dx=-x^{2n}\cos x\big|_0^1+2n\int_0^1 x^{2n-1}(\sin x)'=$

$=-\cos 1+2nx^{2n-1}\sin x\big|_0^1-2n(2n-1)I_{n-2}=2n\sin 1-\cos 1-2n(2n-1)I_{2n-2}$, adică $I_{2n}+2n(2n-1)I_{2n-2}=2n\sin 1-\cos 1$, $\forall n\geq 2$.

VARIANTA 89

1. Pentru fiecare $a>0$, se consideră funcția $f_a:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=(x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $f_a'(x)$, $x>0$.

5p **b)** Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2}$, $\forall n\geq 3$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluții

1. a) $f_a'(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{x+a}{x(x+1)}$.

b) $f_a''(x)=\dfrac{x(2a-1)+a}{x^2(x+1)^2}$; f convexă pe $(0;\infty)$ dacă și numai dacă $f''(x)\geq 0,\forall x>0$, adică $2a-1\geq 0$ și $\dfrac{a}{2a-1}>0$, de unde $a\in\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{\frac{1}{x+a}}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+a)^2}}=1$. Deci $y=1$ este asimptotă orizontală către $+\infty$.

2. a) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=\dfrac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.

b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x(\sin x)'dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx=$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$, de unde $nI_n=(n-1)I_{n-2}$.

c) Cum $\cos x\in[0;1]$ pentru orice $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, atunci $\cos^{n+1}x<\cos^n x$, adică $I_{n+1}<I_n$, deci șirul I_n este descrescător.

$I_n\geq 0$, atunci șirul I_n este și mărginit inferior, deci este convergent.

VARIANTA 90

1. Se consideră funcțiile $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f_1.

5p **b)** Să se demonstreze că funcțiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p **c)** Admitem că ecuația $f_n(x)=2^n$ are soluția unică x_n. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la 2.

2. Fie $a\in[0,1]$ și $I_n=\int_0^a\frac{t^n}{t+1}dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n+I_{n-1}=\frac{a^n}{n}$, $\forall n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f_1(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x+\ln x)=-\infty$, de unde $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta.

b) $g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\frac{1}{x}\right)=x^n+\ln x+\left(\frac{1}{x}\right)^n+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=x^n+x^{-n}+\ln x-\ln x=x^n+x^{-n}$.

$g_n'(x)=nx^{n-1}-nx^{-n-1}$; $g_n''(x)=n(n-1)x^{n-2}+n(n+1)x^{-n-2}>0$ pentru orice $x>0$, de unde funcțiile g_n sunt convexe.

c) Cum $f_n(x)=2^n$ are soluția x_n, atunci $\left(\frac{x_n}{2}\right)^n+\frac{\ln x_n}{2^n}=1$.

$(x_n)_{n\geq 1}$ este șir crescător; $x_n<2$, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la 2.

2. a) $I_2=\int_0^a\frac{t^2}{t+1}dt=\int_0^a\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{a^2}{2}-a+\ln(a+1)$.

b) $I_n+I_{n-1}=\int_0^a\frac{t^n+t^{n-1}}{t+1}dt=\int_0^a t^{n-1}dt=\frac{t^n}{n}\Big|_0^a=\frac{a^n}{n}$.

c) $\frac{t^n}{t+1}<t^n,\forall t\in[0;a]$; $0<I_n<\int_0^a t^n dt=\frac{a^{n+1}}{n+1}\to 0,\forall a\in[0;1]$. De unde, folosind criteriul cleștelui, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

VARIANTA 91

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Fie funcțiile $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\sin^2 x}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xF(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$.

Soluții

1. a) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3+x}=2$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2x\right)=0$, deci $y=2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\frac{6x^2(x^2+1)-2x\cdot 2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^4+6x^2}{(x^2+1)^2}\geq 0$, adică f este crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci injectivă.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. Cum f este continuă, rezultă că f este surjectivă.

f injectivă și surjectivă, rezultă f este bijectivă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2e^{3x}}{e^{2x}+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2e^{3x}}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2e^x)^{\frac{1}{x}}}{\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)^{\frac{1}{x}}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}\cdot e}{\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)^{\frac{1}{x}}}=e$.

2. a) $F'(x)=\left(\int_0^x e^{\sin^2 t}dt\right)'=e^{\sin^2 x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Deci F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xF(x)dx=\frac{1}{2}\sin 2xF(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xF'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{\sin^2 x}dx=$

$=-\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1-e}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{\sin^2 t}dt\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin^2 x}=1$.

VARIANTA 92

1. Se consideră funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(\ln x)$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=e$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este concavă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^{2\pi} xf(x)\,dx$.

Soluții

1. a) $y-f(e)=f'(e)(x-e)$; $f(e)=\ln 1=0$, $f'(e)=\dfrac{1}{\ln e}\cdot\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}$, deci $y=\dfrac{1}{e}(x-e)$, adică $ey-x+e=0$.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}$, $f''(x)=\dfrac{0-\ln x-1}{x^2\ln^2 x}=-\dfrac{1+\ln x}{x^2\ln^2 x}<0$, $\forall x\in(1;\infty)$. Rezultă f concavă pe $(1;+\infty)$.

c) Aplicând teorema lui Lagrange funcției f, rezultă că există $c_x\in(x;x+1)$ astfel încât $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)=\dfrac{1}{c_x\ln c_x}$.

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{c_x\ln c_x}$. Dar $\dfrac{x\ln x}{(x+1)\ln(x+1)}<\dfrac{x\ln x}{c_x\ln c_x}<1$. Și cum $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{(x+1)\ln(x+1)}=1$, atunci, aplicând teorema cleștelui, obținem $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{c_x\ln c_x}=1$.

2. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\sin x)'}{1+\sin^2 x}dx=\operatorname{arctg}(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\dfrac{\pi}{4}$.

b) Fie $F:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Atunci $F'(x)=f(x)$ pentru $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Dar $f(x)>0$ pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, deci $F'(x)>0$ pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, de unde F este strict crescătoare pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Facem următoarea schimbare de variabilă $x=2\pi-y$. Avem că $f(2\pi-y)=f(y)$. Rezultă că $I=\int_{2\pi}^{0}(2\pi-y)f(2\pi-y)(-dy)=\int_0^{2\pi}(2\pi-y)f(y)\,dy=\int_0^{2\pi}2\pi f(y)\,dy-$ $-\int_0^{2\pi}yf(y)\,dy$, adică $I=0-I$, de unde $I=0$.

VARIANTA 93

1. Pentru fiecare $t\in\mathbb{R}$, se consideră funcția $f_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_t(x)=x^3+t^2x$.

5p **a)** Să se calculeze $f_t'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că fiecare funcție f_t este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t)=f_t^{-1}(1)$ este continuă în punctul 0.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x(t^2+1)\sqrt{|t|}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)$.

5p **b)** Să se arate că f este funcție impară.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^2\sqrt{x}}$.

Soluții

1. a) $f_t'(x)=3x^2+t^2$.

b) $f_t'>0$ pe $\mathbb{R}$, deci f_t este strict crescătoare; f_t continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă f_t bijectivă, deci f_t este inversabilă.

c) Avem $g^3(t)+t^2g(t)=1$, unde $1\geqslant g(t)\geqslant 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$, rezultă

$\lim\limits_{t\to0}g(t)=\lim\limits_{t\to0}\sqrt[3]{1-t^2g(t)}=1=g(0)$, deci g este continuă în 0.

2. a) $f(1)=\int_0^1(t^2+1)\sqrt{t}\,dt=\int_0^1\left(t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{7}+\frac{2}{3}=\frac{20}{21}$.

b) $f(x)=\int_0^x(t^2+1)\sqrt{|t|}\,dt=\frac{2}{7}x^3\sqrt{|x|}+\frac{2}{3}x\sqrt{|x|}$. Cum $f(-x)=-f(x)$, atunci funcția f este impară.

c) Aplicând teorema lui Lagrange funcției f rezultă că există $c_x\in(x,x+1)$ astfel încât $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)=(c_x^2+1)\sqrt{c_x}$.

Avem $\dfrac{(x^2+1)\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}<\dfrac{(c_x^2+1)\sqrt{c_x}}{x^2\sqrt{x}}<\dfrac{[(x+1)^2+1]\sqrt{x+1}}{x^2\sqrt{x}}$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[(x+1)^2+1]\sqrt{x+1}}{x^2\sqrt{x}}=1$, folosind teorema cleștelui, obținem

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^2\sqrt{x}}=1$.

VARIANTA 94

1. Se consideră funcțiile $f_n:[0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^{n+1}-(n+2)x+n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că graficele funcțiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$, f_n are exact un punct de extrem x_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{n^2}$, unde x_n este definit la punctul **b)**.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geqslant1}$, $I_n=\int_0^1\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$, $\forall n\geq1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Soluții

1. a) Studiem existența asimptotei orizontale:

$\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^{n+1}-(n+2)x+n\right]=\infty$, pentru că $n\geq1$. Deci nu există asimptotă orizontală. Studiem existența asimptotei oblice:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(n+2)x+n}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x^n-(n+2)+\dfrac{n}{x}=\infty$ pentru că $n\geq1$. Deci nu există asimptotă oblică. Așadar, funcțiile f_n nu admit asimptote la ∞.

b) $f_n'(x)=(n+1)x^n-(n+2)=0$, $x^n=\dfrac{n+2}{n+1}$, deci $x_n=\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=e$.

2. a) $I_1=\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=(x-\operatorname{arctg}x)\Big|_0^1=1-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4-\pi}{4}$.

b) $I_{n+1}+I_n=\int_0^1\left(\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}+\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\right)dx=\int_0^1\dfrac{x^{2n}(1+x^2)}{1+x^2}dx=\int_0^1x^{2n}dx=\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2n+1}$.

c) $I_n=\int_0^1\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}dx$. Fie $f(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

$f'(x)=\dfrac{2nx^{2n-1}\left(1+x^2\right)-x^{2n}\cdot2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2x^{2n-1}\left[n\left(1+x^2\right)-x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2x^{2n-1}\left[(n-1)x^2+n\right]}{\left(1+x^2\right)^2}\geq0$,

$\forall x\in[0,1]$. Deci f este funcție crescătoare, adică $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$, $0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2}$.

Integrând obținem $0 \le \int_0^1 f(x) \le \frac{1}{2}$, $0 \le I_n \le \frac{1}{2}$, deci $(I_n)_{n\ge 1}$ este mărginită.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2-1)}{1+x^2}dx$. Considerăm funcția $g(x) = \frac{x^{2n}(x^2-1)}{1+x^2}, g:[0,1]\to\mathbb{R}$. Cum $x^2 - 1 \le 0$ pentru $x \in [0,1]$ rezultă $g(x) \le 0$ pentru $x \in [0,1]$, deci $\int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2-1)}{1+x^2}dx \le 0$.

Rezultă $I_{n+1} - I_n \le 0$, adică $(I_n)_{n\ge 1}$ este monoton descrescător, adică $(I_n)_{n\ge 1}$ convergent.

Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Folosind punctul **b)** avem $\lim\limits_{n\to\infty}(I_{n+1} + I_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} I_{n+1} + \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, deci $2l = 0$, $l = 0$. Așadar, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

VARIANTA 95

1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$ și

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+2+2^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+3+3^2} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, $I_n = \int_0^1 e^{-x}x^n\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, pentru orice $n \ge 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, deci $y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre ∞.

b) $g'(x) = f'(x+1) - f'(x) - f'\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$; $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

$f'(x+1) = \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2}$; $\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)' = -\frac{1+2x}{\left(1+x+x^2\right)^2}$;

$$f'\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)' = \frac{\left(1+x+x^2\right)^2}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}\cdot\left(-\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}\right);$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+2x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} = \frac{1+x^2-x^2-2x-2+1+2x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} = 0.$$

Rezultă că g este constantă. $g(0) = f(1) - f(0) - f(1) = -f(0) = -\operatorname{arctg} 0 = 0$, deci $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) De la punctul b) avem că: $\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2} = \operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k$.

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k\right] = \operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}1 + \operatorname{arctg}3 - \operatorname{arctg}2 + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}1 = \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

2. a) $I_1=\int_0^1 e^{-x}x\,dx=\int_0^1(-e^{-x})'x\,dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-\frac{1}{e}-e^{-x}\Big|_0^1=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}$.

b) $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n dx=\int_0^1(-e^{-x})'x^n dx=-e^{-x}x^n\Big|_0^1+n\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx$, deci $I_n=nI_{n-1}-\frac{1}{e}$.

c) Fie $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=e^{-x}x^n$.

$g'(x)=-e^{-x}x^n+ne^{-x}x^{n-1}=e^{-x}x^{n-1}(-x+n)\geq 0$ pentru $0\leq x\leq 1$ şi $n\geq 2$. Deci g este crescătoare şi $g(0)\leq g(x)\leq g(1)$, adică $0\leq g(x)\leq\frac{1}{e}\Rightarrow 0\leq I_n\leq\frac{1}{e}$, deci $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

$I_n-I_{n-1}=\int_0^1 e^{-x}x^n dx-\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx=\int_0^1 e^{-x}\left(x^n-x^{n-1}\right)dx=\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}(x-1)\,dx\leq 0$. Aşadar, $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător. Deci $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Fie $l=\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

De la punctul b) avem: $I_{n-1}=\frac{I_n+\frac{1}{e}}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}I_{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n+\frac{1}{e}}{n}=0$, deci $l=0$.

VARIANTA 96

1. Fie mulţimea $A=\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,...,2009\}$ şi funcţia $f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+...+\frac{1}{x-2009}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p **b)** Ştiind că $a\in\mathbb{R}^*$, să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x)=a$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei f.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluţii

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_k\\ x<x_k}}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to x_k\\ x>x_k}}f(x)=\infty$, deci $x=x_k$ sunt asimptote verticale, unde $x_k\in\{1,\ 2,\ ...,\ 2009\}$.

b) $f'(x)=-\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}+...+\frac{1}{(x-2009)^2}\right]<0,\ \forall x$, deci f descrescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty,1)$, $(1,2),(2,3),...,(2008,2009),(2009,\infty)$.

Trasăm graficul funcţiei, iar numărul de rădăcini ale ecuaţiei $f(x)=a$ este egal numărul de intersecţii dintre graficul funcţiei f şi dreapta de ecuaţie $x=a$.

Aşadar: Dacă $a\in(0,\infty)$, atunci ecuaţia admite 2009 soluţii. Dacă $a\in(-\infty,0)$, atunci ecuaţia admite 2009 soluţii. Deci ecuaţia are 2009 soluţii.

c) $f''(x)=2\left[\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-2)^3}+...+\frac{1}{(x-2009)^3}\right]$.

Ecuaţia $f''(x)=0$ are 2008 rădăcini şi funcţia are 2008 puncte de inflexiune.

2. a) Considerăm funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=e^{-t^2}$. Această funcţie este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitivă. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei g; atunci: $G'(t)=g(t)=e^{-t^2}$. Conform formulei lui Leibniz-Newton avem: $f(x)=G(x)-G(0)$;

$f'(x)=G'(x)=e^{-x^2}=\frac{1}{e^{x^2}}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $f''(x)=G''(x)=g'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=-2xe^{-x^2}$. Cum $x\geq 0$ avem $f''(x)\leq 0$.

Deci f este concavă pe $[0,\infty)$.

c) f crescătoare, deci $(f(n))_{n\geq 1}$ este monoton crescător.

Vom demonstra mai întâi inegalitatea $e^x > x+1$, pentru orice $x > 0$. Fie funcția $u:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $u(x)=e^x-x-1$, atunci $u'(x)>0$, pentru orice $x > 0$. Prin urmare, $u(x)>u(0)=0$, deci inegalitatea anterioară este rezolvată. Atunci avem $\frac{1}{x+1}>e^{-x}$ pentru orice $x > 0$, deci și $\frac{1}{x^2+1}>e^{-x^2}$. Avem $\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx>\int_0^n e^{-x^2}dx$. Prin urmare, pentru orice $n\geq 1$, avem $f(n)=\int_0^n e^{-x^2}dx<\operatorname{arctg} n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\pi}{2}$, deci șirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este mărginit superior și rezultă că este un șir convergent.

VARIANTA 97

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Să se rezolve inecuația $f(x)<x-\frac{x^3}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x t^4 f(t)dt$ este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, $\int_1^a f(x)dx<\frac{1}{4}$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\leq 0, \forall x\in[0,\infty)$, deci f este concavă pe $[0;+\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2[\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x^2}}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{x^3}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^2-1-x^2-2x-1}{(1+x^2)[1+(x+1)^2]}\cdot\frac{x^3}{-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^4-x^3}{-2(x^2+1)(x^2+2x+2)}=1$.

c) Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, prin relația $g(x)=f(x)-x+\frac{x^3}{3}$,

$g'(x)=\frac{x^4}{1+x^2}\geq 0$, deci g este o funcție crescătoare; cum $g(0)=0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ rezultă $g(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,0)$.

2. a) $\int_0^1 x\left(1+x^2\right)f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=\ln\sqrt{2}$.

b) $F'(x)=\frac{x^4}{(1+x^2)^2}>0$, deci F este o funcție crescătoare.

c) $\int_1^a\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int_1^a\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\int_1^a x\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\operatorname{arctg}x\Big|_1^a+\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_1^a-\frac{1}{2}\int_1^a\frac{1}{1+x^2}dx=$

$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}a-\frac{\pi}{4}+\frac{a}{1+a^2}-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{4}$.

VARIANTA 98

1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ se defineşte funcţia $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n-nx-1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, funcţia f_n este convexă.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, ecuaţia $f_n(x)=0$ are soluţie unică.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde x_n este unica soluţie a ecuaţiei $f_n(x)=0$.

2. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\cos t\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcţiei g pe intervalul $[0,\pi]$.

5p **c)** Să se calculeze $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Soluţii

1. a) $f_n'(x)=nx^{n-1}-n$; $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$.

Cum $x\geqslant 0$, atunci $f''(x)\geqslant 0$, deci f este convexă.

b) Cum $f_n'(x)=nx^{n-1}-n>0$, pentru orice $x\geqslant 0$, atunci f_n este strict crescătoare pe $[0;+\infty)$, deci injectivă. $f_n(0)=-1$ şi $f_n(1)=n-2\geqslant 0$.

Cum f_n este continuă pe $[0;+\infty)$, atunci există şi este unic $x_n\in(0;1)$ astfel încât $f(x_n)=0$.

c) Avem $f_n(1)<0$ şi $f_n(n)=n^n-n^2-1>0$ pentru $n\geqslant 3$, deci $1<x_n<n$. Din $x_n=\sqrt[n]{1+nx_n}$ avem $1\leqslant x_n\leqslant\sqrt[n]{1+n^2}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

2. a) $\int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^x}dx=\ln(1+e^x)\Big|_0^1=\ln\dfrac{1+e}{2}$.

b) $g'(x)=f(x)\cos x+f(-x)\cos x=\cos x$, deci g este crescătoare pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ şi descrescătoare pe $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

c) $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{1+e^t}dt=I$. Dacă $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^t\cos t}{1+e^t}dt$. Cum $I=J$ şi $I+J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=2$.

Atunci $I=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

VARIANTA 99

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **b)** Să se arate că graficul funcţiei admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră funcţiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n\ln t\,dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1(e)$.

5p **b)** Să se arate că funcţiile f_n sunt descrescătoare pe intervalul $(0,1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.

Soluţii

1. a) Ecuaţia tangentei este: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$. Cum $f(0)=0$ şi $f'(0)=1$, obţinem $y=x$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+3x}{\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2+2x+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2+2x+1\right)\left(x^3-x+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x^3-x+1\right)^2}}=1$.

Deci, asimptota spre $+\infty$ este dreapta $y=1$.

c) $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\sqrt[3]{n^3+3n^2+2n+1}-1$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[3]{n^3+3n^2+2n+1}-1}{n}\right)^n=e^0=1$.

2. a) $f_1(e)=\int_{\frac{1}{e}}^{e} t\ln t\,dt=\dfrac{t^2}{2}\ln t\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}-\dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} t^2\dfrac{1}{t}dt=\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{1}{2e^2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^2}{2}\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}=$

$=\dfrac{e^4+1}{2e^2}-\dfrac{e^4-1}{4e^2}=\dfrac{e^4+3}{4e^2}$.

b) $f_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n\ln t\,dt=F(x)-F\left(\dfrac{1}{e}\right)\Rightarrow f_n'(x)=F'(x)=x^n\ln x$.

Dacă $x\in(0,1)$, atunci $\ln x<0$ şi $x^n>0$. Rezultă că $f_n'(x)<0\Rightarrow f$ este descrescătoare pe (0, 1).

c) $f_n(1)=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n\ln t\,dt=\dfrac{1}{n+1}\left(t^{n+1}\ln t-\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)=0$.

VARIANTA 100

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^3-x^2+x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+3x+2}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\dfrac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n$.

Soluții

1. a) $f'(x)=e^x+3x^2-2x+1=e^x+2x^2+(x-1)^2>0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare.

b) f este strict crescătoare, rezultă f este injectivă. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$; f este continuă, deci $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, adică f este surjectivă.

f injectivă și surjectivă, rezultă f bijectivă, deci f inversabilă.

c) Fie $y=f^{-1}(x)$; obținem $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\ln x}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{\ln(e^y+y^3-y^2+y)}=1$.

2. a) $I_1=\int_0^1\dfrac{x}{x^2+3x+2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{2x+3-3}{x^2+3x+2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}-\dfrac{3}{2}\int_0^1\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}dx=$

$=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3x+2)\Big|_0^1-\dfrac{3}{2}\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx+\dfrac{3}{2}\int_0^1\dfrac{1}{2+x}dx;$

$\dfrac{1}{2}(\ln 6-\ln 2)-\dfrac{3}{2}\ln(x+1)\Big|_0^1+\dfrac{3}{2}\ln(x+2)\Big|_0^1=\dfrac{\ln 3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 2+\dfrac{3}{2}(\ln 3-\ln 2)=\ln\dfrac{9}{8}$.

b) $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\int_0^1\dfrac{x^{n+2}}{x^2+3x+2}dx+\int_0^1\dfrac{3x^{n+1}}{x^2+3x+2}dx+\int_0^1\dfrac{2x^n}{x^2+3x+2}dx=$

$=\int_0^1\dfrac{x^n(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{n+1}$.

c) $nI_n=\int_0^1\dfrac{nx^n}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1nx^n\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)dx=\int_0^1(x^n)'\cdot x\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)dx=$

$=x^{n+1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1x^n\left[\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(x+2)^2}\right]dx=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\int_0^1\left[\dfrac{x^n}{(x+1)^2}-\dfrac{x^n}{(x+2)^2}\right]dx$.

În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

Tabel de evidență a subiectelor rezolvate

În acest tabel sunt spații rezervate fiecărui subiect. În fiecare căsuță din acest tabel puteți nota data la care ați rezolvat subiectele respective. Puteți parcurge subiectele în orice ordine doriți. Indiferent de modul în care v-ați planificat pregătirea examenului, tabelul vă va ajuta să țineți evidența subiectelor rezolvate.

v \ s	I	II	III
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			
11.			
12.			
13.			
14.			
15.			
16.			
17.			
18.			
19.			
20.			
21.			
22.			
23.			
24.			
25.			
26.			
27.			
28.			
29.			
30.			

v \ s	I	II	III
31.			
32.			
33.			
34.			
35.			
36.			
37.			
38.			
39.			
40.			
41.			
42.			
43.			
44.			
45.			
46.			
47.			
48.			
49.			
50.			
51.			
52.			
53.			
54.			
55.			
56.			
57.			
58.			
59.			
60.			

v \ s	I	II	III
61.			
62.			
63.			
64.			
65.			
66.			
67.			
68.			
69.			
70.			
71.			
72.			
73.			
74.			
75.			
76.			
77.			
78.			
79.			
80.			

v \ s	I	II	III
81.			
82.			
83.			
84.			
85.			
86.			
87.			
88.			
89.			
90.			
91.			
92.			
93.			
94.			
95.			
96.			
97.			
98.			
99.			
100.			

CUPRINS

Calendarul examenului de Bacalaureat 2009 3
Programa pentru examenul de Bacalaureat 2009 – Matematică, tipul M1 4
Metodologia de organizare a examenului de Bacalaureat 2009 5

	SUBIECTUL I	SUBIECTUL II	SUBIECTUL III
Varianta 1	15	121	275
Varianta 2	16	123	277
Varianta 3	17	125	279
Varianta 4	18	126	280
Varianta 5	19	127	282
Varianta 6	20	129	283
Varianta 7	21	130	284
Varianta 8	22	132	286
Varianta 9	23	134	288
Varianta 10	24	135	289
Varianta 11	25	136	290
Varianta 12	26	138	292
Varianta 13	27	140	293
Varianta 14	28	142	294
Varianta 15	29	143	295
Varianta 16	30	145	296
Varianta 17	31	146	297
Varianta 18	32	147	298
Varianta 19	33	148	300
Varianta 20	34	150	301
Varianta 21	35	152	302
Varianta 22	36	154	303
Varianta 23	37	156	305
Varianta 24	38	157	306
Varianta 25	39	159	307
Varianta 26	40	161	309
Varianta 27	41	163	310
Varianta 28	42	164	311
Varianta 29	43	165	312
Varianta 30	44	167	314
Varianta 31	45	169	315

Varianta 32 ..... 46 ..... 171 317
Varianta 33 ..... 48 ..... 172 319
Varianta 34 ..... 49 ..... 174 321
Varianta 35 ..... 50 ..... 176 323
Varianta 36 ..... 51 ..... 177 325
Varianta 37 ..... 52 ..... 178 326
Varianta 38 ..... 53 ..... 180 327
Varianta 39 ..... 54 ..... 182 328
Varianta 40 ..... 55 ..... 183 329
Varianta 41 ..... 56 ..... 185 330
Varianta 42 ..... 57 ..... 186 332
Varianta 43 ..... 58 ..... 187 334
Varianta 44 ..... 59 ..... 189 336
Varianta 45 ..... 60 ..... 191 337
Varianta 46 ..... 61 ..... 193 339
Varianta 47 ..... 63 ..... 194 341
Varianta 48 ..... 64 ..... 195 342
Varianta 49 ..... 65 ..... 197 343
Varianta 50 ..... 66 ..... 199 345
Varianta 51 ..... 67 ..... 201 347
Varianta 52 ..... 68 ..... 203 348
Varianta 53 ..... 69 ..... 204 350
Varianta 54 ..... 70 ..... 205 351
Varianta 55 ..... 71 ..... 206 352
Varianta 56 ..... 72 ..... 207 353
Varianta 57 ..... 73 ..... 208 354
Varianta 58 ..... 74 ..... 209 356
Varianta 59 ..... 75 ..... 211 358
Varianta 60 ..... 77 ..... 213 359
Varianta 61 ..... 78 ..... 214 361
Varianta 62 ..... 79 ..... 216 363
Varianta 63 ..... 80 ..... 217 365
Varianta 64 ..... 82 ..... 218 367
Varianta 65 ..... 83 ..... 219 368
Varianta 66 ..... 84 ..... 220 369
Varianta 67 ..... 85 ..... 221 371
Varianta 68 ..... 86 ..... 223 373
Varianta 69 ..... 87 ..... 224 374
Varianta 70 ..... 88 ..... 225 376
Varianta 71 ..... 89 ..... 227 378
Varianta 72 ..... 90 ..... 229 379
Varianta 73 ..... 91 ..... 231 380
Varianta 74 ..... 92 ..... 233 382
Varianta 75 ..... 93 ..... 234 384
Varianta 76 ..... 94 ..... 236 386
Varianta 77 ..... 95 ..... 238 387
Varianta 78 ..... 96 ..... 240 388
Varianta 79 ..... 97 ..... 242 390
Varianta 80 ..... 98 ..... 244 392
Varianta 81 ..... 99 ..... 245 393
Varianta 82 ..... 100 ..... 246 394
Varianta 83 ..... 101 ..... 247 395
Varianta 84 ..... 102 ..... 249 397
Varianta 85 ..... 103 ..... 251 398
Varianta 86 ..... 104 ..... 252 399
Varianta 87 ..... 105 ..... 253 401
Varianta 88 ..... 106 ..... 254 402
Varianta 89 ..... 107 ..... 255 403
Varianta 90 ..... 108 ..... 257 404
Varianta 91 ..... 109 ..... 258 405
Varianta 92 ..... 110 ..... 259 406
Varianta 93 ..... 111 ..... 260 408
Varianta 94 ..... 112 ..... 262 409
Varianta 95 ..... 113 ..... 263 411
Varianta 96 ..... 114 ..... 265 413
Varianta 97 ..... 115 ..... 267 415
Varianta 98 ..... 116 ..... 268 416
Varianta 99 ..... 117 ..... 269 417
Varianta 100 ..... 118 ..... 271 418

Tabel de evidență a subiectelor rezolvate 419

Tipar executat de
S.C. EURO PONTIC SERV S.R.L.
Tel.: 0264-542907; Fax: 0264-414425; Mobil: 0728-389595